கூறுபரவல்களும் பயன்முறைகளும்

- அரங்கநாதன் (செ)

த. பா. நி. (க.வெ.) வரிசை எண்—745

கூறுபரவல்களும் பயன் முறைகளும்

(பட்டப்படிப்பிற்குரியது)

(திருத்தப்பட்ட பாடத்திட்டத்தின்படி வெளியிடப்படுகின்றது)

ஆசிரியர்

செ. அரங்கநாதன், எம்.ஏ., எம்.எஸ்ஸி., எம்.எஸ். (பிளோரிடா),

பேராசிரியர் மற்றும் புள்ளியியல்துறைத் தலைவர்,

மாநிலக் கல்லூரி, சென்னை.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition—April, 1977

Number of Copies — 2,000

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 745

© Government of Tamilnadu

SAMPLING DISTRIBUTIONS AND APPLICATIONS

J. RANGANATHAN

Price Rs. 9-60

Published by the Tamilnadu Textbook Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.

This book has been printed out of concessional —er made available by the Government of India.

Printed by
Nathan & Company,
Main Road, Velacheri,
Madras-600 042.

பதிப்புரை

கூறுபரவல்களும் பயன் முறைகளும் என்ற இந் நூல் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் 745ஆவது வெளியீடாகும். கல்லூரித் தமிழ்க் குழுவின் சார்பில் வெளியான 35 நூல்களையும் சேர்த்து இதுவரை 780 நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன. இந் நூல் மைய அரசு, கல்வி - சமூக நல அமைச்சகத்தின் 'மாநில மொழியில் பல்கலைக்கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்டத்'தின் கீழ் வெளியிடப்படுகிறது.

மேலாண்மை இயக்குநர்,
தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

பொருளடக்கம்

		பக்கம்
1.	நிகழ்தகவுக் கோட்பாடு (Probability Theory) ...	1
2.	ராண்டம் மாறிகளும் நிகழ்தகவுப் பரவல்களும் (Random Variables and Probability Distributions) ...	29
3.	சில திட்டமான நிகழ்தகவுப் பரவல்கள் (Some Standard Probability Distributions) ...	90
4.	கூறுபரவல்கள் (Sampling Distributions) ...	147
5.	புள்ளியியல் உய்த்துணர்வு (Statistical Inference) ...	216
6.	சில திருத்தமான கூறுபரவல்களும் பயன் முறைகளும் (Some Exact Sampling Distributions and Applications) ...	221
7.	அணுகுகோடு கூறுபரவல்களும் பயன்முறைகளும் (Asymptotic Sampling Distributions and Applications) ...	291
8.	பரவல் விடுபட்ட முறைகள் (Distribution-Free Methods) ...	359
	அட்டவணைகள் ...	390
	மேற்கோள் நூற்பட்டியல் ...	413
	கலைச்சொற்கள் ...	414

1. நிகழ்தகவுக் கோட்பாடு

(Probability Theory)

ராண்டம் சோதனைகள் (Random Experiments)

ஒரு முயற்சி அல்லது சோதனையின் விளைவு ஓர் உறுதியான நிகழ்ச்சியாகவோ அல்லது பல்வேறு நிகழ்ச்சிகளில் ஏதேனு மொன்ருகவோ அமைகிறது. ஒரு கல்லை மேல்நோக்கி எறியும் முயற்சியில் அது உயரச்சென்று பிறகு கீழே விழுவது உறுதியான விளைவாகும். தண்ணீரைத் தொடர்ந்து சூடாக்கும்போது அது நீராவியாக மாறுவது உறுதியான நிகழ்ச்சியாகும். இவ்விரு முயற்சிகளும் அவைகளின் விளைவுகளைப்பற்றித் திட்டவட்டமாக எதிர்நோக்கும்படி அமைகின்றன. ஆனால், சில முயற்சிகளில் ஏற்படக்கூடிய விளைவுகளைப் பற்றி உறுதியாகக் கூற இயலாது. ஒரு கண்ணாடிக் குவளையைக் கீழே எறியும்போது அது உடைந்து தூளாகும் என உறுதியாகக் கூறுவதற்கில்லை; ஏனெனில், அது சேதமின்றி இருப்பதற்கும் வாய்ப்பு உள்ளது. ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டியெறியும் முயற்சியில் 'தலை' மேற்புறம் விழும் என உறுதி யாகக் கூற இயலாது; 'பூ' மேற்புறம் விழுவதற்கும் வாய்ப்பு உண்டு. கறுப்பு, சிவப்பு, வெள்ளை நிறப் பந்துகள் உள்ள பையிலிருந்து ஒரு பந்தை எடுக்கும்போது அது கறுப்பு நிறமாகவோ அல்லது சிவப்பு நிறமாகவோ அல்லது வெள்ளை நிறமாகவோ அமையும். ஒரு சோதனையை மேற்கொள்ளும் போது அதன் விளைவு உறுதியான நிகழ்ச்சியல்லாது பல்வேறு நிகழ்ச்சிகளில் ஏதேனும் ஒன்ருக அமையுமெனில் அச் சோதனையை **ராண்டம் சோதனை** என வழங்குகிறோம்.

கூறுவெளி (Sample Space)

ஒரு ராண்டம் சோதனையின் முடிவானது பல்வேறு நிகழ்ச்சி களில் ஏதேனுமொன்று எனும்போது இந் நிகழ்ச்சிகளை அடிப்படை யான அல்லது ஆதாரமான நிகழ்ச்சிகள் (Elementary events) என வழங்குகிறோம். ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டியெறியும்போது 'தலை', 'பூ' ஆகிய இரு பக்கங்களில் ஒன்று மேற்புறம் நோக்கித் தோன்று மாதலால் இவ்விரு நிகழ்ச்சிகளை ஆதாரமான நிகழ்ச்சிகள் என்கிறோம். கறுப்பு, வெள்ளை, பச்சை நிறப் பந்துகள் அடங்கி

யுள்ள ஒரு பையிலிருந்து ஒரு பந்தை எடுக்கும்போது அது கறுப்பு அல்லது வெள்ளை அல்லது பச்சை நிறமாக ஏற்படுவது இம் முயற்சியின் மூன்று ஆதாரமான நிகழ்ச்சிகளாகின்றன. ஒரு ராண்டம் சோதனையில் ஏற்படக்கூடிய அடிப்படையான நிகழ்ச்சிகளின் தொகுதியை அல்லது குழுவை, **கூறுவெளி** (Sample Space) என வரையறுக்கிறோம்.

ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டியெறியும் முயற்சியில் ஏற்படக் கூடிய 'தலை', 'பூ' ஆகிய நிகழ்ச்சிகளின் தொகுதி {தலை, பூ} ஒரு கூறுவெளியாகும்.

கறுப்பு, வெள்ளை, பச்சை நிறப் பந்துகள் அடங்கியுள்ள பையிலிருந்து எடுக்கப்படும் பந்தின் நிறத்தைக் குறிப்பிடும்போது ஏற்படக்கூடிய 'கறுப்பு', 'வெள்ளை', 'பச்சை' ஆகிய மூன்று ஆதாரமான நிகழ்ச்சிகளின் தொகுதியானது

{ கறுப்பு, வெள்ளை, பச்சை }

ஒரு கூறுவெளியாகும்.

ஓர் இயந்திரம் உற்பத்தி செய்யும் திருகாணிகளில் 5 திருகாணிகளை ஆய்வுசெய்து அவைகளில் பழுதற்ற திருகாணிகளின் எண்ணிக்கையைக் கணக்கிடும்போது உண்டாகும் கூறுவெளி

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

ஆகும்.

ஒரு சிவப்புப் பகடையையும், ஒரு வெள்ளைப் பகடையையும் உருட்டும்போது அவைகளின் மேல்பக்கத்தில் தோன்றும் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையைக் குறிப்பிடுவதாகக் கொள்ளும்போது ஏற்படும் அடிப்படையான நிகழ்ச்சிகள் சோடி எண்களாக அமைகின்றன. சோடி எண்களில் முதல் எண், சிவப்புப் பகடையின் மேல் பக்கத்தில் தோன்றும் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையையும், இரண்டாவது எண், வெள்ளைப் பகடையின் மேல்பக்கத்தில் தோன்றும் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையையும் குறிப்பிடுமெனில் சோதனை உருவாக்கும் கூறுவெளி

$$\begin{matrix} (1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), & (1,5), & (1,6) \\ (2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,4), & (2,5), & (2,6) \\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4), & (3,5), & (3,6) \\ (4,1), & (4,2), & (4,3), & (4,4), & (4,5), & (4,6) \\ (5,1), & (5,2), & (5,3), & (5,4), & (5,5), & (5,6) \\ (6,1), & (6,2), & (6,3), & (6,4), & (6,5), & (6,6) \end{matrix}$$

ஆகும்.

ஒரு குழுவில் பத்தாயிரம் நபர்கள் உள்ளனர் எனவும், அவர்களை 1, 2, 3, 4, ..., 10,000 ஆகிய எண்களைக் கொண்டு குறிப்பிடுவதாகவும் கொள்வோம். இக் குழுவிலிருந்து ஒரு நபரை தேர்ந்தெடுக்கும் முயற்சியின்போது உருவாகும் கூறுவெளி

$$\{ 1, 2, 3, \ldots\ldots, 9999, 10,000 \}$$

ஆகும்.

(0, 1) இடைவெளியில் அடங்கியுள்ள ஒரு புள்ளியைத் தேர்ந்தெடுக்கும் முயற்சியில் உருவாக்கும் கூறுவெளி, இடைவெளி (0, 1) ஆகும்.

ஒரு கூறுவெளியில் அடங்கியுள்ள ஆதாரமான நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை (i) முடிவுள்ளதாயின் அக் கூறுவெளியை முடிவுள்ள கூறுவெளி (Finite Sample Space) எனவும், (ii) முடிவில்லாத ஆனால் 1, 2, 3, ... என எண்ணிடத்தக்கவாறு அமையின் அக் கூறுவெளியை எண்ணிடத்தக்க கூறுவெளி (Countable Sample Space) எனவும், (iii) முடிவில்லாததும் 1, 2, 3, ... என எண்ணிடத் தகாதவாறும் அமையின் அக் கூறுவெளியை எண்ணிடத் தகாத கூறுவெளி (Uncountable Sample Space) எனவும் வழங்குகிறோம்.

நிகழ்தகவு (Probability)

ஒரு ராண்டம் சோதனை உருவாக்கும் கூறுவெளியின் ஒரு பகுதியை 'A' எனக் குறிப்போம். சோதனையை மேற்கொள்ளும் போது ஏற்படும் விளைவு 'A' பகுதியில் அடங்கியிருக்குமெனில் 'நிகழ்ச்சி A' நிகழ்ந்ததாகக் குறிப்பிடுவோம். முழுதொத்த சார்பற்றவாறு சோதனையை M முறைகள் திரும்பத் திரும்பச் செய்யும்போது நிகழ்ச்சி A-ஆனது m முறைகள் ஏற்படுகிறது என்போம். அப்போது விகிதம் $\frac{m}{M}$ ஐ நிகழ்ச்சி A-ன் சார்பலை வெண் (Relative Frequency) எனக் குறிப்பிடுவோம். M-ன் மதிப்பு எண்ணிலியை அணுகும்போது நிகழ்ச்சி A-ன் சார்பலைவெண் ஒரு நிலைப்பாட்டு மதிப்பை அணுகுமெனில் அம் மதிப்பை நிகழ்ச்சி A-ன் நிகழ்தகவு என வரையறை செய்கிறோம். இந் நிகழ்தகவைப் பட்டறி நிகழ்தகவு (Empirical Probability) என வழங்குகிறோம்.

ஒரு ராண்டம் சோதனையில் நிகழக்கூடிய ஆதார நிகழ்ச்சிகளின் மொத்த எண்ணிக்கை N எனவும், இவைகள் சம வாய்ப்புடையனவாகவும், ஒன்றையொன்று விலக்குவனவாகவும், யாவுமளாவியனவாகவும் அமைகின்றன எனவும் கொள்வோம்.

சோதனையின்போது ஒரு குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சி A நிகழுவதற்குச் சாதகமாக n ஆதார நிகழ்ச்சிகள் உள்ளதெனில் விகிதம் $\frac{n}{N}$ - ஐ நிகழ்ச்சி A-ன் நிகழ்தகவு என வரையறை செய்கிறோம். இந் நிகழ்தகவைக் கணக்கியல் நிகழ்தகவு (Mathematical Probability) என வழங்குகிறோம்.

இப்போது இருவகைகளில் வழங்கப்படும் நிகழ்தகவுக் கருத்துகள் ஒன்றுடன் ஒன்று தொடர்பு கொண்டிருப்பது பற்றிக் குறிப்பிடுவோம். ஒரு ராண்டம் சோதனையில் ஒரு நிகழ்ச்சி நிகழ் வதற்கான கணக்கியல் நிகழ்தகவு மதிப்பு 'p' எனும்போது அச் சோதனையை முழுதொத்த சார்பற்றவாறு எண்ணிலி முறைகள் திரும்பத் திரும்பச் செய்யும்போது அவைகளுள் p விகித முறை களில் அந் நிகழ்ச்சி நிகழும் எனக் கொள்வோமெனில், கணக்கியல் நிகழ்தகவும் பட்டறி நிகழ்தகவும் நிகழ்தகவுக் கருத்தை இரு கோணங்களில் எடுத்தளிக்கின்றன எனக் கூறுகிறோம்.

ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டியெறியும்போது 'பூ', 'தலை' ஆகிய ஆதார நிகழ்ச்சிகள் நிகழுகின்றன. இவ்விரு ஆதார நிகழ்ச்சி களும் சம வாய்ப்புடையனவாகவும், ஒன்றையொன்று விலக்கு வனவாகவும், யாவுமளாவியனவாகவும் அமையுமெனக் கொள் வோம். 'பூ' என்னும் நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு மதிப்பை P(பூ) எனக் குறியீடு கொண்டு குறிப்பிட்டு

$$P(\text{பூ}) = \frac{\text{சாதகமான ஆதார நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை}}{\text{ஆதார நிகழ்ச்சிகளின் மொத்த எண்ணிக்கை}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

எனக் கணக்கிடுகிறோம்.

நன்கு கலைக்கப்பட்ட விளையாட்டுச் சீட்டுக் கட்டிலிருந்து ஒரு சீட்டை எடுக்கும்போது ஏற்படும் ஆதார நிகழ்ச்சிகளின் மொத்த எண்ணிக்கை 52. இவைகள் ஒன்றையொன்று விலக்குவனவாக வும், சம வாய்ப்புடையனவாகவும், யாவுமளாவியனவாகவும் அமைகின்றன எனக் கொள்வோம். இப்போது எடுக்கப்பட்ட சீட்டு 'ஸ்பேட்' வகைச் சீட்டாக அமைவதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(\text{ஸ்பேட்}) = \frac{\text{சாதகமான ஆதார நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை}}{\text{ஆதார நிகழ்ச்சிகளின் மொத்த எண்ணிக்கை}}$$

$$= \frac{13}{52}$$

$$= \frac{1}{4}$$

ஆகும்.

ஒரு பையிலுள்ள 5 பந்துகளின்மேல் a, b, c, d, e ஆகிய எழுத்துகள் குறிக்கப்பட்டுள்ளன எனவும், a, b ஆகிய எழுத்துகள் குறிக்கப்பட்டுள்ள பந்துகள் வெள்ளை நிறமும், c, d, e ஆகிய எழுத்துகள் குறிக்கப்பட்டுள்ள பந்துகள் கறுப்பு நிறமும் கொண்டுள்ளன எனவும் கொள்வோம். இப் பையிலிருந்து இரு பந்துகளை எடுக்கும் முயற்சியில் ஏற்படக்கூடிய ஆதார நிகழ்ச்சிகள்

$$(a, b),\quad (a, c),\quad (a, d),\quad (a, e),\quad (b, c),$$
$$(b, d),\quad (b, e),\quad (c, d),\quad (c, e),\quad (d, e)$$

ஆகின்றன. இவைகள் சம வாய்ப்புடையனவாகவும், ஒன்றையொன்று விலக்குவனவாகவும், யாவுமளாவியனவாகவும் அமைகின்றன எனக் கொள்வோம். இப்போது பையிலிருந்து எடுக்கும் இரு பந்துகளும் கறுப்பு நிறமுடையனவாக அமைவதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(\text{இரு கறுப்புப் பந்துகள்}) = \frac{\text{சாதகமான ஆதார நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை}}{\text{ஆதார நிகழ்ச்சிகளின் மொத்த எண்ணிக்கை}}$$

$$= \frac{3}{10}$$

ஆகும்.

ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு மதிப்பானது இடைவெளி (0, 1)-யில் அடங்கியிருக்கும் ஒரு பின்னமாகும். நிகழ்தகவு மதிப்பு 1 எனில் நிகழ்ச்சி உறுதியாக நிகழும் என்பதையும், நிகழ்தகவு மதிப்பு 0 (பூச்சியம்) எனில் நிகழ்ச்சி உறுதியாக நிகழாது என்பதையும் குறிப்பிடுகின்றன.

நிகழ்ச்சிகளின் இயற்கணிதம் (Algebra of Events)

ஒரு ராண்டம் சோதனையில் நிகழக்கூடிய ஆதார நிகழ்ச்சிகள் அடங்கியுள்ள தொகுதியைக் கூறுவெளி எனவும், கூறுவெளியின் பகுதியை நிகழ்ச்சி எனவும் குறிப்பிட்டோம். கணவியல் (Set Theory) முறைப்படி கூறுவெளியை முழுமைக்கணம் (Master Set) எனவும், நிகழ்ச்சியை உட்கணம் (Sub Set) எனவும் வழங்குகிறோம்.

கூறுவெளியை Ω எனவும், அதில் அடங்கியிருக்கும் உறுப்பை ω எனவும் குறியீடுகளால் குறிப்பிடுவோம். கூறுவெளியின் உட்கணம் அல்லது கணப்பகுதி A என்போம். இப்போது ஓர் உறுப்பானது A-கணப்பகுதியில் அடங்கியிருப்பின் அதைக் குறியீட்டால் $\omega \in A$ எனவும்,

அது A-யில் அடங்கியிராதாயின் அதைக் குறியீட்டால் $\omega \notin A$ எனவும் குறிப்பிடுகிறோம்.

கூறுவெளியின் உறுப்புகளில் யாதொன்றும் அடங்கியிராத கணப் பகுதியை வெற்றுக் கணம் (Null Set) என்கிறோம்.

வரையறை

A, *B* ஆகியவைகள் ஒரு கூறுவெளியின் உட்கணங்கள் என்போம். *A* கணத்தில் அடங்கியிருக்கும் ஒவ்வோர் உறுப்பும் *B* கணத்திலும் அடங்கியிருப்பின், *A*-கணம் *B* கணத்தில் உள்ளடங்கியிருக்கிறது என்கிறோம். இதைக் குறியீட்டால் $A \subset B$ எனக் குறிப்பிடுகிறோம்.

A, *B* ஆகிய இரு கணங்கள் ஒவ்வொன்றும் மற்றதில் உள்ளடங்கியதாயின் அவ்விரு கணங்களைச் சமகணங்கள் என்கிறோம். மறுதலையாக *A*, *B* ஆகியன சமகணங்கள் எனில் அவ்விரு கணங்களில் ஒவ்வொன்றும் மற்றதில் உள்ளடங்கியிருக்கும் என்கிறோம். இதைக் குறியீட்டால்

$$A \subset B,\ B \subset A \Longleftrightarrow A = B$$

எனக் குறிப்பிடுகிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு

கூறுவெளி

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$ எனவும்,

$A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{1, 2, 4, 6, 8, 9, 11\}$ ஆகியன Ω-ன் உட்கணங்கள் எனவும் கொள்ளும்போது, *A*-கணப்பகுதியில் அடங்கியிருக்கும் ஒவ்வோர் உறுப்பும் *B*-கணப்பகுதியிலும் அடங்கியிருக்கிறது. ஆகவே, *A*-கணப்பகுதி *B*-கணப்பகுதியில் உள்ளடங்கியிருக்கிறது, $A \subset B$ என்கிறோம்.

இப்போது $C = \{3, 6, 9, 12\}$

$$D = \{x : x \in \Omega, \frac{x}{3} \text{ ஒரு முழு எண்}\}$$

ஆகியன Ω-ன் இரு உட்கணங்கள் எனில்,

$C \subset D$

$D \subset C$

ஆக அமைகின்றன.

எனவே, $C = D$ என்கிறோம்.

வரையறை

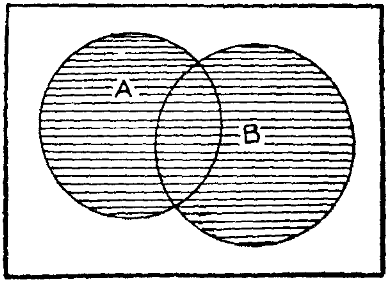
சேர்ந்த கணங்கள் (Union of Sets)

A, *B* ஆகியன இரு கணங்கள் என்போம். இப்போது ஒரு கணத்தில் அடங்கியிருக்கும் ஒவ்வோர் உறுப்பும் *A*-கணத்திலோ அல்லது *B*-கணத்திலோ அடங்கியிருக்குமாயின், அக்கணத்தை *A*, *B* ஆகிய கணங்களின் **சேர்ந்த கணம்** (Uuion of Sets A and B) என வரையறுக்கிறோம். *A*, *B* கணங்களின் சேர்ந்த கணத்தை $A \cup B$ எனக் குறியீடு கொண்டு குறிப்பிடும்போது

$$A \cup B = \{ \omega : \omega \in A \text{ அல்லது } \omega \in B \}$$

ஆகும்.

A U B



படம் 1.1

எடுத்துக்காட்டு

$$A = \{ a, b, c, d, h \}$$
$$B = \{ a, c, e, f, g, h \}$$

எனில்,

$$A \cup B = \{ a, b, c, d, e, f, g, h \}$$

ஆகும்.

வரையறை

$A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots\ldots$ ஆகிய கணங்களின் சேர்ந்த கணத்தை $(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots\ldots\ldots)$ எனக் குறியீட்டால் குறிப்பிட்டு இதில் அடங்கியிருக்கும் ஒவ்வோர் உறுப்பும் $A_1, A_2, A_3, \ldots$ ஆகிய கணங்களில் குறைந்தபட்சம் ஏதேனுமொன்றில் அடங்கியிருக்கும் என வரையறை செய்கிறோம்

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots\ldots\ldots = \{ \omega : \omega \in A_1 \text{ அல்லது } \omega \in A_2 \text{ அல்லது } \omega \in A_3 \ldots\ldots \}$$

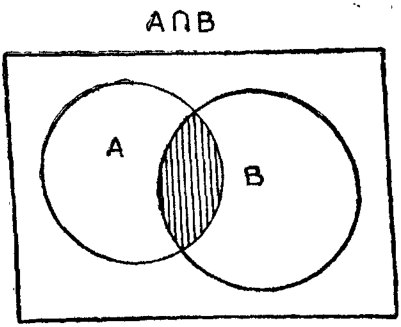
வரையறை

வெட்டு கணங்கள் (Intersection of Sets)

A, B ஆகியன இரு கணங்கள் என்போம். இப்போது ஒரு கணத்தில் அடங்கியிருக்கும் ஒவ்வோர் உறுப்பும் A கணத்திலும் B கணத்திலும் அடங்கியிருக்குமாயின், அக் கணத்தை A, B ஆகிய கணங்களின் **வெட்டு கணம்** (Intersection of Sets A and B) என வழங்குகிறோம். A, B ஆகிய கணங்களின் வெட்டு கணத்தை $A \cap B$ எனக் குறியீடு கொண்டு குறிப்பிடும்போது

$$A \cap B = \{ \omega : \omega \in A, \omega \in B \}$$

ஆகும்.



படம் 1.2

எடுத்துக்காட்டு

(i) $A = \{ a, b, c, d, h \}$
$B = \{ a, c, e, f, g, h \}$

எனில்,

$$A \cap B = \{ a, c, h \}$$

(ii) L = { பூச்சியத்திற்குக் கூடுதலான இரட்டைப்படை எண்கள் }

M = { பூச்சியத்திற்குக் கூடுதலான ஒற்றைப்படை எண்கள் }

எனில், $L \cap M = \phi$ ஆகும்.

வரையறை

$A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots$ ஆகிய கணங்களின் வெட்டு கணத்தை $(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots\ldots)$ எனக் குறியீட்டால் குறிப்பிட்டு இதில் அடங்கியிருக்கும் ஒவ்வோர் உறுப்பும் $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots$ ஆகிய கணங்கள் ஒவ்வொன்றிலும் அடங்கியிருக்கும் என்கிறோம்.

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots\ldots = \{ \omega : \omega \in A_k;\ k = 1, 2, \ldots\ldots \}$$

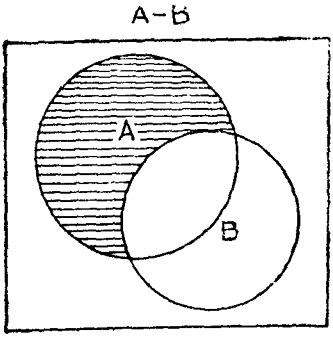
வரையறை

விடுபட்ட கணங்கள் (Difference of Sets)

A, *B* ஆகியன இரு கணங்கள் என்போம். இப்போது ஒரு கணத்தில் அடங்கியிருக்கும் ஒவ்வோர் உறுப்பும் *A* கணத்தில் அடங்கியுள்ளதாகவும் ஆனால் *B* கணத்தில் அடங்கியில்லாததாக வும் அமையின், அக் கணத்தை *B* கணத்திலிருந்து விடுபட்ட *A* கணம் என வரையறை செய்கிறோம். இக் கணத்தைக் குறியீட்டால் $(A-B)$ எனக் குறிப்பிடும்போது

$$A-B = \{ \omega : \omega \in A, \ \omega \notin B \}$$

ஆகும்.



படம் 1.3

எடுத்துக்காட்டு

(i) $A = \{ a, b, c, d, h \}$

$B = \{ a, c, e, f, g, h \}$ எனில்,

$A-B = \{ b, d \}$ ஆகவும்,

$B-A = \{ e, f, g \}$ ஆகவும்

அமைகின்றன.

(ii) $W = \{ x : -5 \leq x \leq 3 \}$

$V = \{ x : -12 \leq x \leq 12 \}$

எனில்,

$$V-W = \{ x : -12 \leq x < -5 \}$$

$$V \{ x : 3 < x \leq 12 \}$$ ஆகவும்,

$W-V = \phi$ ஆகவும் அமைகின்றன.

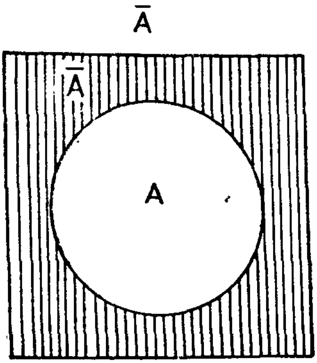
வரையறை

நிரப்பி கணம் (Complementary Set)

கூறுவெளி Ω-ன் உட்கணம் A எனும்போது A கணத்தி லிருந்து விடுபட்ட Ω கணத்தை A-ன் நிரப்பிகணம் என வழங்கு கிறோம். இதை $\bar{A}$ எனக் குறியீட்டால் குறிப்பிடும்போது

$$\bar{A} = \Omega - A = \{ \omega : \omega \in \Omega, \omega \notin A \}$$

ஆகும்.



படம் 1.4

எடுத்துக்காட்டு

$\Omega = \{ a, b, c, d, e, f, g, h, i, j \}$

$A = \{ a, b, c, d, h \}$ எனில்,

$\bar{A} = \Omega - A = \{ e, f, g, i, j \}$ ஆகும்.

வரையறை

பிரிந்த கணங்கள் (Disjoint Sets)

A, B ஆகிய இருகணங்களில் ஒவ்வொன்றில் அடங்கியிருக்கும் உறுப்புகள் மற்றதில் அடங்கியிராதுபோயின், அதாவது, A, B கணங்களின் வெட்டிய கணம் வெற்றுக் கணம் எனின் அவைகளைப் **பிரிந்த கணங்கள்** என வழங்குகிறோம்.

தேற்றம்

ஒரு முழுமைக் கணம் Ω-ன் உட்கணங்கள் A, B ஆகியன. எனில்,

(i) $\bar{A} \cap B = (A \cup B) - A$

(ii) $\bar{A} \cup \bar{B} = \Omega - (A \cap B)$,

(iii) $\bar{A} \cap \bar{B} = \Omega - (A \cup B)$

ஆக அமைகின்றன.

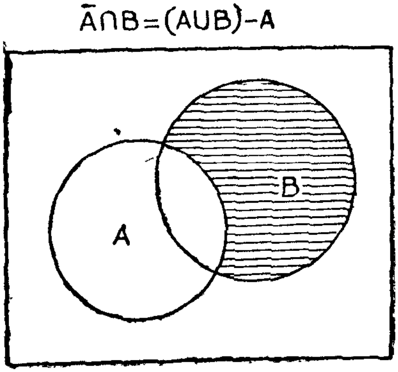
தெரிப்பு

(i) $\bar{A} \cap B = \{ \omega : \omega \in \bar{A},\ \omega \in B \}$

$= \{ \omega : \omega \notin A,\ \omega \in B \}$

$= \{ \omega : \omega \notin A,\ \omega \in A \cup B \}, \quad \because \ \omega \in B \Rightarrow \omega \in A \cup B$

$= (A \cup B) - A.$



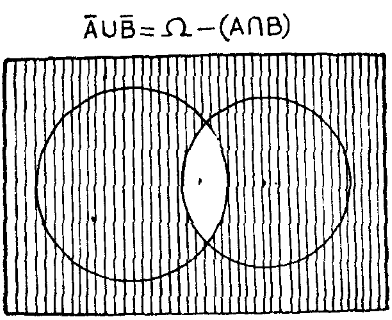
படம் 1.5

(ii) $\bar{A} \cup \bar{B} = \{ \omega ; \omega \in \bar{A}$ அல்லது $\omega \in \bar{B} \}$

$= \{ \omega : \omega \notin A$ அல்லது $\omega \notin B \}$

$= \{ \omega : \omega \notin A \cap B \}$

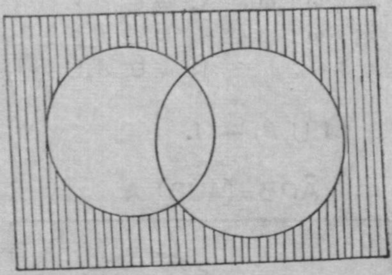
$= \Omega - (A \cap B).$



படம் 1.6

$$\begin{aligned}(\text{iii}) \quad \bar{A} \cap \bar{B} &= \{ \omega : \omega \in \bar{A},\ \omega \in \bar{B} \} \\ &= \{ \omega : \omega \notin A,\ \omega \notin B \} \\ &= \{ \omega : \omega \notin A \cup B \} \\ &= \Omega - (A \cup B)\end{aligned}$$

$\bar{A} \cap \bar{B} = \Omega - (A \cup B)$



படம் 1.7

கணங்களைப்பற்றி வழங்கப்பட்ட கருத்துகளை ராண்டம் சோதனையின் நிகழ்ச்சிகளுக்குப் பொருத்தமாகக் கீழ்க்கண்டவாறு குறிப்பிடுகிறோம் :

(i) '*A* கணமானது *B* கணத்தில் அடங்கியிருக்கிறது' என்பது 'நிகழ்ச்சி *A*-க்குச் சாதகமான ஆதார நிகழ்ச்சிகள் ஒவ்வொன்றும் நிகழ்ச்சி *B*-க்கும் சாதகமானது' என்பதாகும்.

(ii) 'கணம் *A*-ஆனது வெற்றுக் கணம்' என்பது 'நிகழ்ச்சி *A*-க்குச் சாதகமான ஆதார நிகழ்ச்சிகள் ஏதுமில்லை' என்பதாகும்.

(iii) 'கணம் *A*-ஆனது முழுமைக்கணம்' என்பது 'கூறுவெளியில் அடங்கியிருக்கும் ஆதாரமான நிகழ்ச்சிகள் ஒவ்வொன்றும் நிகழ்ச்சி *A*-க்குச் சாதகமானது' என்பதாகும்.

(iv) '*A*, *B* ஆகிய கணங்களின் சேர்ந்த கணம்' என்பது '*A*, *B* ஆகிய நிகழ்ச்சிகளில் குறைந்தபட்சம் ஏதேனுமொன்றுக்குச் சாதகமான ஆதார நிகழ்ச்சிகள்' என்பதாகும்.

(v) '*A*, *B* ஆகிய கணங்களின் வெட்டிய கணம்' என்பது '*A*, *B* ஆகிய இரு நிகழ்ச்சிகளுக்கும் சாதகமான ஆதார நிகழ்ச்சிகள்' என்பதாகும்.

(vi) '*B* கணத்திலிருந்து விடுபட்ட *A*-கணம்' என்பது 'நிகழ்ச்சி *A*-க்குச் சாதகமான ஆனால் அதே சமயத்தில் நிகழ்ச்சி *B*-க்குச் சாதகமில்லாத ஆதார நிகழ்ச்சிகள்' என்பதாகும்.

(vii) '$\bar{A}$ கணமானது A கணத்தின் நிரப்பி கணம்' என்பது 'நிரப்பி நிகழ்ச்சி $\bar{A}$-ஆனது நிகழ்ச்சி A-க்குச் சாதகமிலாத ஆதார நிகழ்ச்சிகளின் தொகுதி' என்பதாகும்.

(viii) 'A, B ஆகியன பிரிந்த கணங்கள்' என்பது 'நிகழ்ச்சி A-க்குச் சாதகமான ஆதார நிகழ்ச்சிகள் யாவும் நிகழ்ச்சி B-க்குச் சாதகமற்றதாகவும், நிகழ்ச்சி B-க்குச் சாதகமான நிகழ்ச்சிகள் யாவும் நிகழ்ச்சி A-க்குச் சாதகமற்றதாகவும் உள்ளன' என்பதாகும். இவ்வாறுள்ள நிகழ்ச்சிகளை ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் (Mutually Exclusive Events) என வழங்குகிறோம்.

கணக்களம் (Field of Sets)

முழுமைக் கணத்தைச் சார்ந்த உட்கணங்களின் குழுவைக் கணத்தொகுதி (Class of Sets) என்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டாக, முழுமைக்கணம் $\Omega = \{a, b, c, d\}$ எனக் கொள்ளும்போது $A = \{a\}$, $B = \{d\}$, $C = \{a, b, c\}$, $D = \{b\}$, $E = \{a, d\}$ ஆகியன Ω-ன் உட்கணங்களாகும். B, E ஆகிய இரு உட்கணங்களின் குழு $\{B, E\}$ ஒரு கணத் தொகுதியாகும். A, B, C, D, E ஆகிய ஐந்து உட்கணங்களின் குழு $\{A, B, C, D, E\}$ ஐ கணத்தொகுதி என்கிறோம். கணத்தொகுதியின் ஒவ்வோர் உறுப்பும் ஒரு கணமாகும்.

முழுமைக் கணம் $\Omega = \{ x : -\alpha < x < \alpha \}$ எனில்,

$$A_n = \{ x : -n < x < 1 \}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

ஆகிய உட்கணங்களின் தொகுதியானது ஒரு கணத்தொகுதியாகும்.

$B = \{1, 2\}$, $C = \{2, 3, 8, 25\}$, $D = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 2, 8\frac{1}{6}\}$ எனில், $\{B, C, D\}$ ஒரு கணத்தொகுதியாகும்.

ஒரு கணத்தொகுதியில் குறைந்த அளவு ஒரு கணமாவது இடம்பெறின், அதை வெறுமையிலாத கணத்தொகுதி (Non-empty Class) எனக் குறிப்பிடுவோம்.

வரையறை

σ – கணக்களம் (σ – Field of Sets)

ஒரு வெறுமையிலாத கணத் தொகுதி F எனக்கொள்வோம்.

(i) கணம் A-ஆனது கணத்தொகுதி F-ன் உறுப்பு எனில், அதன் நிரப்பி கணமாகிய $\bar{A}$-ம் F-ன் உறுப்பாகவும்,

(ii) A_1, A_2, ... ஆகிய எண்ணிடத்தக்க கணங்கள் ஒவ்வொன்றும் கணத்தொகுதி F-ன் உறுப்புகள் எனில், அவைகளின் சேர்ந்த கணம் $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, F-ன் உறுப்பாகவும் அமையப்பெறின்,

கணத்தொகுதி F-ஐ σ–கணக்களம் என்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு

முழுமைக்கணம் $\Omega = \{e, f, g\}$ எனக் கொள்வோம். அதன் உட்கணங்கள் $A_1 = \{e\}$, $A_2 = \{f\}$, $A_3 = \{g\}$, $A_4 = \{e, f\}$, $A_5 = \{e, g\}$, $A_6 = \{f, g\}$, $A_7 = \{e, f, g\}$, $A_8 = \phi$ ஆகியவைகளின் கணத்தொகுதி $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8\}$ ஆனது σ-கணக்களமாகும்.

கணச் சார்பு (Set Function)

x–மாறியானது ஒரு பரிமாண வெளியில் அடங்கியிருக்கும் மெய்யெண் மதிப்புகளை ஏற்றுக்கொள்ளுகிறது என்போம்.

x-மாறியின் சார்பு

$$f(x) = 3x - 1$$

எனும்போது, x மாறி ஏற்றுக்கொள்ளும் ஒவ்வொரு மெய்யெண் மதிப்புக்குத் தொடர்பாக $f(x)$ சார்பு ஒரு மதிப்பை ஏற்றுக் கொள்ளுகிறது என்பதைக் குறிக்கும்.

$x = 0$ எனில், $f(0) = -1$ ஆகவும்,
$x = 1$ எனில், $f(1) = 2$ ஆகவும்,
$x = \frac{1}{3}$ எனில், $f(\frac{1}{3}) = 0$ ஆகவும்

அமைகின்றன.

இங்கு $f(x)$ ஐ x மாறியின் 'புள்ளிச் சார்பு' என வழங்குகிறோம். இப் புள்ளிச் சார்பானது, x மாறியின் ஒவ்வொரு மதிப்புக்கும் தொடர்பாக ஒரு மெய்யெண்ணை அமைக்கும் விதியாகும் என்கிறோம்.

x, y ஆகிய சோடி மாறிகள் இரு பரிமாண வெளியில் அடங்கியிருக்கும் மெய்யெண் மதிப்புகளை ஏற்றுக் கொள்ளுகின்றன என்போம். x, y மாறிகளின் சார்பு

$$g(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & 0 \le x \le 10,\ 0 \le y \le 10 \\ 0, & \text{மற்றபடி} \end{cases}$$

எனில், (x, y) மாறிகள் ஏற்றுக்கொள்ளும் ஒவ்வொரு சோடி மதிப்புகளுக்குத் தொடர்பாக $g(x, y)$ சார்பானது ஒரு மதிப்பை ஏற்றுக்கொள்ளுகிறது என்பதாகும்.

$(x = 1, y = 1)$ எனில், $g(1, 1) = 2$ ஆகவும்,
$(x = 10, y = 0)$ எனில், $g(10, 0) = 100$ ஆகவும்,
$(x = -1, y = 5)$ எனில், $g(-1, 5) = 0$ ஆகவும்

அமைகின்றன.

சார்பு $g(x, y)$ஐ (x, y) மாறிகளின் புள்ளிச் சார்பு என்கிறோம்.

இதுபோன்றே, $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ ஆகிய n மாறிகளின் சார்பு $h(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ எனில், இம் மாறிகள் n பரிமாண மெய்யெண்கள் கணப்பகுதியில் அடங்கும் புள்ளியின் மதிப்புகளை ஏற்றுக் கொள்ளும்போது, இதற்குத் தொடர்பாக சார்பு $h(x_1, x_2, \ldots, x_n)$-ம் ஒரு மதிப்பை ஏற்றுக்கொள்ளுகிறது என்பதைக் குறிக்கும்.

$$h(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1}{x_2 - x_3}$$

$$h(x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4$$

ஆகியவைகள் முறையே மூன்று மாறிகள், நான்கு மாறிகள் புள்ளிச் சார்புகளாகின்றன.

இப்போது, ஒரு முழுமைக் கணத்தின் உட்கணங்கள் அடங்கியுள்ள கணத்தொகுதியின் ஒவ்வொரு கணத்திற்கும் தொடர்பாக ஒரு மெய்யெண் அமையும்படி ஒரு விதியை வரையறை செய்யின் அவ் விதியை கணச் சார்பு (Set Function) என்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 1.

ஒருபரிமாண மெய்யெண்கள் கணம் R-ன் உட்கணங்கள் அடங்கியுள்ள கணத்தொகுதியினைக் கவனிப்போம். ஒவ்வோர் உட்கணத்திலும் அடங்கியிருக்கும் முழு எண்களின் எண்ணிக்கையை அதற்குத் தொடர்பான மெய்யெண்

$Q(A)$ = கணப்பகுதி A-ல் அடங்கியிருக்கும் முழு எண்களின் எண்ணிக்கை, $A \subset R$ என வரையறை செய்யின், $Q(A)$ ஆனது ஒரு கணச் சார்பாகும்.

$A = \{x : 2 \leq x \leq 10\}$ எனில், $Q(A) = 9$ ஆகவும்,
$A = \{x : 1\frac{1}{2} < x < 1\frac{3}{4}\}$ எனில், $Q(A) = 0$ ஆகவும்,
$A = \{4, 26, -5, 11\}$ எனில், $Q(A) = 4$ ஆகவும்

அமைகின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 2.

இருபரிமாண மெய்யெண்களின் வெளி R^2-ன் உட்கணம் முடிவுள்ள பரப்பு உடையதாயின் அப் பரப்பைக் கணத்துடன்

தொடர்புறும் மெய்யெண் எனவும், பரப்பு முடிவுற்றதாயின் கணத்துடன் தொடர்புறும் மெய்யெண் 10 எனவும் வரையறை செய்யின், இத் தொடர்பைக் குறிப்பிடும் விதியைக் கணச்சார்பு என்கிறோம். R^2-ன் உட்கணத்தை B எனவும், இதற்குத் தொடர்பாகும் மெய்யெண்ணை $G(B)$ எனவும் குறிப்பிடுவோம்.

$B = \{ (x, y) : x^2+y^2 \leq 1\}$ எனில், $G(B) = \pi$ ஆகவும்,
$B = \{ x, y) : 0<x<3, -\frac{1}{2} <y<2\frac{1}{2}\}$ எனில், $G(B)=6$ ஆகவும்,
$B = \{ (x, y) : x\geq 2, -8<y<0\}$ எனில், $G(B) = 10$ ஆகவும்,
$B = \{ (0, 1), (2,-6), (4, 8)\}$ எனில், $G(B) = 0$ ஆகவும்
அமைகின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 3.

$W_1 = \{1\}$, $W_2 = \{1, 2\}$, $W_3 = \{2, 3\}$, $W_4 = \{1, 3, 5\}$, $W_5 = \{2, 5\}$, $W_6 = \{2, 1, 5\}$ ஆகிய கணங்களின் தொகுதியை F எனவும், F-ல் அடங்கியுள்ள A-கணத்திற்குத் தொடர்பாகும் மெய்யெண்

$$\phi(A) = 0, \quad 1\in A$$
$$\phi(A) = 1, \quad 1\notin A$$

என்ற விதிகளின்படி அமைவதாகக் கொள்வோம். அப்போது $\phi(A)$ ஒரு கணச்சார்பாகும். F-ன் உறுப்புகட்குத் தொடர்பான மெய்யெண்கள்

$$\phi(W_1) = 0 \qquad \phi(W_4) = 0$$
$$\phi(W_2) = 0 \qquad \phi(W_5) = 1$$
$$\phi(W_3) = 1 \qquad \phi(W_6) = 0$$

ஆகின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 4.

புள்ளிச் சார்பு $f(x) = \begin{cases} 4^x & , x = 0, 1, 2, 3, \ldots \\ 0 & , \text{மற்றபடி} \end{cases}$

எனவும், ஒருபரிமாண வெளி R-ன் உட்கணம் C-க்குத் தொடர்பாக்கும் மெய்யெண் $Q(C)$ ஆனது

$$Q(C) = \sum_x f(x)$$

விதியின்படி யமைகிறதெனவும் கொள்வோம். அப்போது $Q(C)$ ஒரு கணச்சார்பாகும்.

$C = \{x : 0 \leq x \leq 2\}$ எனில், $Q(C) = 17$ ஆகவும்,
$C = \{x : -25 \leq x \leq -\frac{1}{2}\}$ எனில், $Q(C) = 0$ ஆகவும்,
$C = \{1\frac{1}{2}, 2\frac{3}{4}, 5\frac{1}{8}\}$ எனில், $Q(C) = 0$ ஆகவும்
அமைகின்றன.

நிகழ்தகவு கணச்சார்பு (Probability Set Function)

வரையறை

ஒரு ராண்டம் சோதனை உருவாக்கும் கூறுவெளியை Ω எனவும், கூறுவெளியின் உட்கணங்கள் அடங்கியுள்ள ஒரு σ-கணக் களத்தை $\mathbf{A}$ எனவும் குறிப்பிடுவோம். இப்போது ஒரு கணச் சார்பு P கீழ்க்கண்ட நிபந்தனைக்குட்படும்படி

(i) $\mathbf{A}$-ன் அடங்கியுள்ள எந்தவொரு கணத்திற்கும் தொடர்பான P கணச்சார்பின் மதிப்பு, பூச்சியம் அல்லது பூசசியத்திற்குக் கூடுதலாகவும்,

$$P(C) \geq O, \quad C \in \mathbf{A},$$

(ii) $C_1, C_2, C_3, \ldots$ ஆகிய ஒன்றுக்கொன்று பிரிந்த கணங்கள் யாவும் $\mathbf{A}$-ல் அடங்கியுள்ளதெனில்,

$$P(C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup \ldots) = P(C_1) + P(C_2) + P(C_3) + \ldots$$

ஆகவும்,

(iii) $P(\Omega) = 1$ ஆகவும்,

அமையின் P-ஐ σ-கணத்தொகுதி $\mathbf{A}$-ன் மேல் வரையறை செய்யப்படும் நிகழ்தகவு கணச்சார்பு என அழைக்கிறோம்.

நிகழ்ச்சி C-க்குத் தொடர்பான மெய்யெண் $P(C)$-ஐ நிகழ்ச்சி C-ன் நிகழ்தகவு அளவை (Probability Measure) என வழங்குகிறோம்.

தேற்றம் 1.

நிகழ்ச்சி C-யின் நிகழ்தகவு அளவை $P(C)$ எனில், நிரப்பி நிகழ்ச்சி $\bar{C}$-ன் நிகழ்தகவு அளவை,

$$P(\bar{C}) = 1 - P(C)$$

ஆகும்.

தெரிப்பு

நிகழ்ச்சி C, நிரப்பி நிகழ்ச்சி $\bar{C}$ ஆகியவைகளின் சேர்ந்த நிகழ்ச்சியானது கூறுவெளி Ω ஆகும்.

அதாவது, $C \cup \bar{C} = \Omega$.

நிகழ்தகவு கணச்சார்பு வரையறையின்படி,

$$P(C \cup \bar{C}) = P(\Omega) = 1$$

ஆகும். இப்போது, C, $\bar{C}$ ஆகியவைகள் பிரிந்த நிகழ்ச்சிகளாதலால்,

$$P(C \cup \bar{C}) = P(C) + P(\bar{C})$$

ஆகும்.

எனவே, $P(C) + P(\bar{C}) = 1$

அதாவது, $P(\bar{C}) = 1 - P(C)$ ஆகும்.

தேற்றம் 2.

வெற்று நிகழ்ச்சி ϕ-ன் நிகழ்தகவு அளவை பூச்சியமாகும்.

தெரிப்பு

வெற்று நிகழ்ச்சி ϕ-ன் நிரப்பி நிகழ்ச்சி $\bar{\phi}$ ஆனது கூறுவெளி Ω ஆகும். தேற்றம் 1-ன் படி

$$\begin{aligned} P(\phi) &= 1 - P(\bar{\phi}) \\ &= 1 - P(\Omega) \\ &= 1 - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

ஆகும்.

தேற்றம் 3.

நிகழ்ச்சி A ஆனது நிகழ்ச்சி B-ல் உள்ளடங்கியது, $A \subseteq B$, எனில்,

(i) $P(B-A) = P(B) - P(A)$

(ii) $P(B) \geq P(A)$

ஆகின்றன.

தெரிப்பு

(i) $A \subseteq B$ என அமைவதால் $(B-A)$, A ஆகியன பிரிந்த நிகழ்ச்சிகளாகின்றன.

$(B-A)$, A ஆகியவைகளின் சேர்ந்த நிகழ்ச்சி B ஆக அமைவதால்,

$$P(B) = P(B-A) + P(A)$$

எனவே,

$$P(B-A) = P(B) - P(A)$$

ஆகும்.

(ii) இப்போது, $P(B-A) \geq 0$ ஆவதால்,

$$P(B) - P(A) \geq 0$$

அதாவது, $P(B) \geq P(A)$ ஆகும்.

தேற்றம் 4.

σ-கணக்களம் **A**-ல் அடங்கியுள்ள உறுப்பு C-ன் நிகழ்தகவு அளவை $P(C)$ ஆனது,

$$0 \leq P(C) \leq 1$$

ஆக அமைகிறது.

தெரிப்பு

σ-கணக்களம் **A** ல் அடங்கியுள்ள உறுப்பு C-ஆனது கீழ்க்கண்ட நிபந்தனைக்கு

$$\phi \subseteq C \subseteq \Omega$$

உட்பட்டு அமைகிறது. எனவே, தேற்றம் 3-ன்படி,

$$P(\phi) \leq P(C) \leq P(\Omega)$$

அதாவது,

$$0 \leq P(C) \leq 1 \qquad \because \; P(\phi) = 0, \; P(\Omega) = 1$$

ஆகும்.

தேற்றம் 5.

A, B ஆகியன இரு நிகழ்ச்சிகளெனில்,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ஆகும். இதை நிகழ்தகவு கூட்டல் விதி (Addition Rule of Probability) என அழைக்கிறோம்.

தெரிப்பு

A, B ஆகிய நிகழ்ச்சிகளின் சேர்ந்த நிகழ்ச்சி $A \cup B$ ஆனது,

$$A \cup B = [A-(A \cap B)] \cup [B-(A \cap B)] \cup (A \cap B)$$

ஆகும்.

இங்கு, $[A-(A \cap B)]$, $[B-(A \cap B)]$, $A \cap B$ ஆகியன பிரிந்த நிகழ்ச்சிகளாகின்றன. எனவே,

$$P(A \cup B) = P[A-(A \cap B)] + P[B-(A \cap B)] + P(A \cap B)$$

ஆகும்.

இப்போது, தேற்றம் 3-ன்படி

$$P[A-(A \cap B)] = P(A) - P(A \cap B)$$
$$P[B-(A \cap B)] = P(B) - P(A \cap B)$$

ஆகின்றன.

எனவே,

$$P(A \cup B) = [P(A) - P(A \cap B)] + [P(B) - P(A \cap B)] + P(A \cap B)$$
$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.

ஒரு பகடையை உருட்டும்போது ஏற்படும் ஆதாரமான நிகழ்ச்சிகள் ஒவ்வொன்றின் நிகழ்தகவு அளவை $\frac{1}{6}$ எனக்கொள்க.

$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$ எனில், A, A-ன் நிரப்பி, B, $A \cup B$, $A \cap B$ ஆகிய நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவு அளவை மதிப்புகளை அடைக.

முறை

பகடையை உருட்டும்போது ஏற்படும் ஆதாரமான நிகழ்ச்சிகளின் கூறுவெளி

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

ஆகும். நிகழ்தகவு கணச்சார்பு P ஆனது ஒவ்வோர் ஆதாரமான நிகழ்ச்சிக்கும் அளிக்கும் நிகழ்தகவு $\frac{1}{6}$ ஆக அமைவதால், $C_1 = \{1\}$, $C_2 = \{2\}$, $C_3 = \{3\}$, $C_4 = \{4\}$, $C_5 = \{5\}$, $C_6 = \{6\}$ எனக் கொள்ளும்போது,

$$P(C_1) = P(C_2) = P(C_3) = P(C_4) = P(C_5) = P(C_6) = \frac{1}{6}$$

இப்போது, $A = \{1, 2, 3, 4\}$
$$= C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$$

ஆகும். C_1, C_2, C_3, C_4 ஆகியன பிரிந்த கணங்களாதலால்,

$$P(A) = P(C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4)$$
$$= P(C_1) + P(C_2) + P(C_3) + P(C_4)$$
$$= \frac{4}{6}$$
$$= \frac{2}{3}$$

நிகழ்ச்சி A-ன் நிரப்பி நிகழ்ச்சியை $\bar{A}$ எனக் குறிப்பிடும்போது,

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$
$$= 1 - \frac{2}{3}$$
$$= \frac{1}{3}$$

ஆகும்,

இப்போது, $B = \{3, 4, 5, 6\}$
$= C_3 \cup C_4 \cup C_5 \cup C_6$

ஆகும். C_3, C_4, C_5, C_6 ஆகியன பிரிந்த கணங்களாவதால்,

$$\begin{aligned} P(B) &= P(C_3 \cup C_4 \cup C_5 \cup C_6) \\ &= P(C_3) + P(C_4) + P(C_5) + P(C_6) \\ &= \tfrac{4}{6} \\ &= \tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

ஆகும்.

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{1, 2, 3, 4\} \cap \{3, 4, 5, 6\} \\ &= \{3, 4\} \\ &= C_3 \cup C_4 \end{aligned}$$

ஆகும். எனவே,

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(C_3 \cup C_4) \\ &= P(C_3) + P(C_4) \\ &= \tfrac{2}{6} \\ &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

ஆகும்.

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{1, 2, 3, 4\} \cup \{3, 4, 5, 6\} \\ &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ &= \Omega \end{aligned}$$

ஆகும். எனவே, $P(A \cup B) = P(\Omega) = 1$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.

ஒரு கூறுவெளியின் உட்கணங்கள் A, B, $A \cap B$ ஆகியவைகளின் நிகழ்தகவு அளவை

$$P(A) = 0{\cdot}8,\ P(B) = 0{\cdot}5,\ P(A \cap B) = 0{\cdot}4$$

எனில், $P(A \cup B)$-ன் மதிப்பை அறிக.

முறை

கூட்டல் விதி தேற்றத்தின்படி,

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 0{\cdot}8 + 0{\cdot}5 - 0{\cdot}4 \\ &= 0{\cdot}9. \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 3.

நிகழ்ச்சி E ஆனது நிகழ்ச்சி F-ல் உள்ளடங்கி யிருக்கிறதெனவும் இந்நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவு

$P(E) = \frac{1}{8}$, $P(F) = \frac{1}{2}$

எனவும் கொள்ளும்போது, $P(F - E)$-ன் மதிப்பைப் பெறுக.

முறை

$E \subseteq F$ என அமைவதால் தேற்றம் 3-ன் படி

$$P(F - E) = P(F) - P(E)$$
$$= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{8}$$
$$= \tfrac{3}{8}.$$

நிபந்தனை நிகழ்தகவு (Conditional Probability)

ஒரு ராண்டம் சோதனை உருவாக்கும் கூறுவெளியின் உட்கணங்கள் அடங்கியுள்ள ஒரு σ-கணக்களத்தை $\mathbf{A}$ எனவும், $\mathbf{A}$ மேல் வரையறை செய்யப்படும் நிகழ்தகவு கணச்சார்பை P எனவும் கொள்வோம். $\mathbf{A}$-ல் அடங்கியுள்ள ஒரு கணம் A-ஐ $P(A) > 0$ எனும் நிபந்தனைக்குட்படும்படியாக எடுத்துக் கொள்வோம். கணம் B ஆனது $\mathbf{A}$-ல் அடங்கியுள்ள பிறிதொரு கணம் எனக் கொள்வோம். இப்போது A கணத்தை ஒரு புதிய கூறுவெளியாகக் கொண்டு, B கணத்திற்குத் தொடர்பான நிகழ்தகவு அளவையைப் பெறின் அதை 'நிகழ்ச்சி A கொடுக்கப்படும்போது நிகழ்ச்சி B ஏற்படுவதற்கான நிபந்தனை நிகழ்தகவு' என வழங்குகிறோம். இதைக் குறியீட்டால், $P(B/A)$ எனக் குறிப்பிடுகிறோம்.

நிகழ்ச்சி A கொடுக்கப்படும்போது, நிகழ்ச்சி B-ன் நிபந்தனை நிகழ்தகவு சார்பை

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}, \quad P(A) > 0$$

என வரையறுக்கிறோம்.

கணக்கு

ஒரு ராண்டம் சோதனையில் ஏற்படக்கூடிய நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவு அளவை

$$P(A) = \tfrac{5}{6}, \quad P(B) = \tfrac{1}{6}, \quad P(C) = \tfrac{1}{12},$$
$$P(D) = \tfrac{1}{36}, \quad P(A \cap B) = \tfrac{1}{6}, \quad P(A \cap C) = \tfrac{1}{18},$$
$$P(A \cap D) = 0$$

எனில், நிகழ்ச்சி A கொடுக்கப்படும்போது நிகழ்ச்சிகள் B, C, D ஆகியவைகளின் நிபந்தனை நிகழ்தகவு மதிப்புகளைக் கணக்கிடுக.

முறை

நிகழ்ச்சி A கொடுக்கப்படும்போது நிகழ்ச்சி B-ன் நிபந்தனை நிகழ்தகவு

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{6}} = \frac{1}{5}$$

ஆகும்.

நிகழ்ச்சி A கொடுக்கப்படும்போது, நிகழ்ச்சி C-ன் நிபந்தனை நிகழ்தகவு

$$P(C/A) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{5}{6}} = \frac{1}{15}$$

ஆகும்.

நிகழ்ச்சி A கொடுக்கப்படும்போது, நிகழ்ச்சி D-ன் நிபந்தனை நிகழ்தகவு

$$P(D/A) = \frac{P(A \cap D)}{P(A)} = \frac{0}{\frac{5}{6}} = 0$$ ஆகும்.

நிபந்தனை நிகழ்தகவு வரையறையின் வாயிலாக, இரு நிகழ்ச்சிகளின் இணைந்த நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு மதிப்பைப் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு பெருக்கல் விதி (Multiplication Rule of Probability) கீழ்க்கண்டவாறு அமைகிறது.

A, B ஆகியன இரு நிகழ்ச்சிகள் எனவும், $P(A)$ ஆனது நிகழ்ச்சி A-ன் நிகழ்தகவையும், $P(B/A)$ ஆனது A கொடுக்கப்படும்போது நிகழ்ச்சி B-ன் நிபந்தனை நிகழ்தகவையும் குறிப்பிடுகிறதெனவும் கொள்வோம். அப்போது, A, B ஆகியவைகளின் இணைந்த நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

ஆகும்.

கணக்கு

ஒரு ராண்டம் சோதனையில் நிகழ்ச்சி A ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவு 0.8 எனவும், A கொடுக்கப்படும்போது நிகழ்ச்சி B-ன்

நிபந்தனை நிகழ்தகவு 0.5 எனவும் கொள்ளும்போது, *A*, *B* ஆகிய இரு நிகழ்ச்சிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவு மதிப்பைப் பெறுக.

முறை

$$P(A) = 0{\cdot}8, \quad P(B/A) = 0{\cdot}5$$

ஆக அமைவதால், நிகழ்தகவு பெருக்கல் விதிப்படி

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B/A) \\ &= 0{\cdot}8 \times 0{\cdot}5 \\ &= 0{\cdot}4 \end{aligned}$$

ஆகும்.

கணக்கு

4 வெள்ளை, 6 கறுப்பு நிறப் பந்துகள் உள்ள பையிலிருந்து ஒரு பந்தைத் தேர்ந்தெடுத்து அதைப் பைக்குள் திருப்பிச் சேர்க்காமல் பிறகு ஒரு பந்தைத் தேர்ந்தெடுப்பதாகக் கொள்வோம். ஒவ்வொரு முறையும் பந்தை எடுக்கும்போது ஏற்படும் ஆதாரமான நிகழ்ச்சிகள் சமவாய்ப்புடன் அமையுமெனில், தேர்ந்தெடுக்கப்படும் இரு பந்துகளும் கறுப்பு நிறமாக அமைவதற்கான நிகழ்தகவைப் பெறுக.

முறை

4 வெள்ளை, 6 கறுப்பு நிறப் பந்துகள் உள்ள பையிலிருந்து ஒரு பந்தைத் தேர்ந்தெடுக்கும் முயற்சியில் ஏற்படக்கூடிய ஆதாரமான நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை 10 ஆகும். இவைகள் சமவாய்ப்புடன் ஏற்படுவதால் ஒவ்வோர் ஆதாரமான நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு $\frac{1}{10}$ ஆகும். முதல்முறையில் எடுக்கப்பட்ட பந்தைத் திருப்பிப் பைக்குள் சேர்க்காமல் இரண்டாம் முறை ஒரு பந்தை எடுக்கும்போது ஏற்படக்கூடிய ஆதாரமான நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை 9 ஆகும். இவைகளும் சமவாய்ப்புடன் ஏற்படுவதால், இவைகள் ஒவ்வொன்றின் நிகழ்தகவு $\frac{1}{9}$ ஆகும்.

முதல்முறையில் கறுப்பு நிறப் பந்தைத் தேர்ந்தெடுப்பதை B_1 எனவும், இரண்டாவது முறையில் கறுப்பு நிறப் பந்தைத் தேர்ந்தெடுப்பதை B_2 எனவும் குறிப்பிடுவோம். அப்போது, $P(B_1) = \frac{6}{10}$ ஆகும். B_1 ஏற்பட்டுள்ளது எனக் கொடுக்கப்படும்போது, B_2 ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவு,

$$P(B_2/B_1) = \tfrac{5}{9} \text{ ஆகும்.}$$

எனவே, இருமுறைகளிலும் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் பந்துகள் கரு நிறமாக அமைவதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1).\ \ P(B_2/B_1)$$
$$= \frac{6}{10} \times \frac{5}{9}$$
$$= \frac{1}{3}$$

ஆகும்.

பேய்ஸின் தேற்றம் (Bayes Theorem)

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ ஆகியன ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் எனவும், இந்நிகழ்ச்சிகளில் ஏதேனுமொன்று ஏற்படும்போதுதான் நிகழ்ச்சி B ஏற்படுமெனவும் கொள்வோம். மேலும், $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ஆகிய நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவு அளவைகள் முறையே $P(A_1)$, $P(A_2), \ldots, P(A_n)$ எனவும், நிகழ்ச்சி A_r கொடுக்கப்பட்டுள்ளபோது B-ன் நிபந்தனை நிகழ்தகவு $P(B/A_r)$, $r = 1, 2, \ldots, n$ எனவும் கொள்வோம். இப்போது நிகழ்ச்சி B ஏற்பட்டுள்ளதெனக் கொடுக்கப்படும்போது நிகழ்ச்சி A_r ஏற்பட்டிருப்பதற்கான நிபந்தனை நிகழ்தகவு

$$P(A_r/B) = \frac{P(A_r).\ P(B/A_r)}{\sum_{r=1}^{n} P(A_r).\ P(B/A_r)}$$

ஆகும்.

தெரிப்பு

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ ஆகிய ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளில் ஏதேனுமொன்று ஏற்படும்போதுதான் நிகழ்ச்சி B ஏற்படுமென்பதால் நிகழ்ச்சி B ஏற்பட்டுள்ளதெனும்போது, நிகழ்ச்சி A_1 ஏற்பட்டு அதனுடன் இணைந்து நிகழ்ச்சி B ஏற்பட்டுள்ளது அல்லது .... அல்லது நிகழ்ச்சி A_r ஏற்பட்டு அதனுடன் இணைந்து நிகழ்ச்சி B ஏற்பட்டுள்ளது அல்லது .... அல்லது நிகழ்ச்சி A_n ஏற்பட்டு அதனுடன் இணைந்து நிகழ்ச்சி B ஏற்பட்டுள்ளது என்பதைக் குறிக்கும். எனவே,

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \ldots \cup (A_n \cap B)$$

ஆகும்.

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ ஆகியன ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளாக அமைவதால், $A_1 \cap B$, $A_2 \cap B, \ldots, A_n \cap B$ ஆகியன ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளாக அமைகின்றன. எனவே,

$$P(B) = P[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \ldots \cup (A_n \cap B)]$$
$$= \sum_{r=1}^{n} P(A_r \cap B)$$

ஆகும்.

இப்போது $P(A_r \cap B) = P(A_r).\ P(B/A_r),\ r = 1, 2, \ldots, n$ ஆக அமைவதால்,

$$P(B) = \sum_{r=1}^{n} P(A_r).\ P(B/A_r)$$

ஆகும்.

இப்போது, நிகழ்ச்சி B கொடுக்கப்படும்போது, நிகழ்ச்சி A_r-ன் நிபந்தனை நிகழ்தகவு

$$P(A_r/B) = \frac{P(A_r \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A_r).\ P(B/A_r)}{\sum_{r=1}^{n} P(A_r).\ P(B/A_r)}$$

ஆகும்.

கணக்கு

L, M ஆகிய இரு பைகள் ஒவ்வொன்றிலும் கறுப்பு, வெள்ளை நிறப் பந்துகள் உள்ளன. இவ்விரு பைகளிலிருந்து ஒன்றைத் தேர்ந்தெடுத்து, பிறகு அதிலிருந்து ஒரு பந்தை எடுப்பதாகக் கொள்வோம். L பையைத் தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0·7 எனவும், M பையைத் தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0·3 எனவும், L பையிலிருந்து ஒரு வெள்ளைப் பந்தை எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0·4 எனவும், M பையிலிருந்து ஒரு வெள்ளைப் பந்தை எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0·5 எனவும் கொள்வோம். எடுக்கப்பட்ட பந்து வெள்ளை நிறமெனில் அது L பையிலிருந்து எடுக்கப்பட்டிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு அளவையைக் காண்க.

முறை

L, M ஆகிய பைகளைத் தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு மதிப்புகள்

$$P(L) = 0{\cdot}7$$
$$P(M) = 0{\cdot}3$$

ஆகின்றன.

L பையிலிருந்து ஒரு வெள்ளைப் பந்தை எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு

P (வெள்ளை / L) $= 0{\cdot}4$ ஆகவும்,

M பையிலிருந்து ஒரு வெள்ளைப் பந்தை எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(\text{வெள்ளை} \mid M) = 0.5 \quad \text{ஆகவும்}$$

அமைகின்றன.

எனவே, பேய்ஸின் தேற்றத்தின்படி

$$P(L/\text{வெள்ளை}) = \frac{P(L).\,P(\text{வெள்ளை}/L)}{P(L)\cdot P(\text{வெள்ளை}/L) + P(M).P(\text{வெள்ளை}/M)}$$

$$= \frac{0.28}{0.28 + 0.15}$$

$$= \frac{0.28}{0.43}$$

$$= 0.65$$

ஆகும்.

சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள் (Independent Events)

A, B ஆகியன இரு நிகழ்ச்சிகள் எனக் கொள்வோம். நிகழ்ச்சி A கொடுக்கப்படும்போது நிகழ்ச்சி B-ன் நிபந்தனை நிகழ்தகவு, நிகழ்ச்சி B-ன் நிகழ்தகவு ஆகியன சமமெனில்,

$$P(B/A) = P(B).$$

A, B ஆகிய நிகழ்ச்சிகளை சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள் என வரையறை செய்கிறோம். A, B ஆகியன சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகளெனில், இவ்விரு நிகழ்ச்சிகளின் இணைந்த நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு

$$P(A \cap B) = P(A).\ P(B/A)$$
$$= P(A).\ P(B)$$

ஆகும். இதை இரு சார்பற்ற இணைந்த நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவு மதிப்பைப் பெறுவதற்கான **நிகழ்தகவு பெருக்கல் விதி** (Multiplication Rule of Probability) என அழைக்கிறோம்.

கணக்கு

ஒரு பையிலுள்ள 5 வெள்ளை, 4 கறுப்பு நிறப் பந்துகளில் ஒன்றைத் தேர்ந்தெடுத்து அதன் நிறத்தைக் குறித்துக்கொண்டு அதைப் பைக்குள் திருப்பிச் சேர்த்து பிறகு ஒரு பந்தைத் தேர்ந்தெடுப்பதாகக் கொள்வோம். ஒவ்வொரு முறையும் பந்தை எடுக்கும்போது ஏற்படும் ஆதாரமான நிகழ்ச்சிகள் சம வாய்ப்புடன் அமையுமெனில், தேர்ந்தெடுக்கப்படும் இரு பந்து

களும் வெள்ளை நிறமாக ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவு மதிப்பை அடைக.

முறை

5 வெள்ளை, 4 கறுப்பு நிறப் பந்துகள் கொண்ட பையிலிருந்து ஒரு பந்தைத் தேர்ந்தெடுக்கும் முயற்சியில் ஏற்படக்கூடிய ஆதார மான நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை 9 ஆகும். இவைகள் சம வாய்ப்புடன் ஏற்படுவதால் ஒவ்வோர் ஆதாரமான நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு $\frac{1}{9}$ ஆகும். முதல் முயற்சியில் எடுக்கப்பட்ட பந்தைத் திருப்பிப் பைக்குள் சேர்த்து பிறகு இரண்டாவது முறை ஒரு பந்தை எடுக்கும்போது ஏற்படக்கூடிய ஆதாரமான நிகழ்ச்சி களின் எண்ணிக்கை 9 ஆகும். இவைகளும் சம வாய்ப்புடன் ஏற்படுவதால் இவைகள் ஒவ்வொன்றின் நிகழ்தகவு $\frac{1}{9}$ ஆகும்.

முதல் முறையில் வெள்ளைப் பந்தைத் தேர்ந்தெடுப்பதை W_1 எனவும், இரண்டாவது முறையில் வெள்ளைப் பந்தைத் தேர்ந் தெடுப்பதை W_2 எனவும் குறிப்பிடுவோம். W_1 ஏற்பட்டுள்ளது எனக் கொடுக்கப்படும்போது W_2 ஏற்படுவதற்கான நிபந்தனை நிகழ்தகவு

$$P(W_2/W_1) = \frac{5}{9} \text{ ஆகும்.}$$

முதல் முறையில் எடுக்கப்படும் பந்தின் நிறம் கொடுக்கப்படாது' இருக்கும்போது இரண்டாவது முறையில் வெள்ளைப் பந்தைத் தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(W_2) = \frac{5}{9} \text{ ஆகும்.}$$

இப்போது, $P(W_2/W_1) = P(W_2)$

ஆக அமைவதால், முதல் முறையில் வெள்ளைப் பந்தைத் தேர்ந் தெடுக்கப்படும் நிகழ்ச்சி, இரண்டாவது முறையில் வெள்ளைப் பந்தைத் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் நிகழ்ச்சி ஆகியவைகள் சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகளாகின்றன. இவ்விரு நிகழ்ச்சிகளும் இணைநிகழ்வதற் கான நிகழ்தகவு

$$\begin{aligned} P(W_1 \cap W_2) &= P(W_1).\ P(W_2) \\ &= \frac{5}{9} \times \frac{5}{9} \\ &= \frac{25}{81} \end{aligned}$$

ஆகும்

2. ராண்டம் மாறிகளும், நிகழ்தகவு பரவல்களும்

(Random Variables and Probability Distributions)

ராண்டம் மாறி (Random Variable)

ஒரு ராண்டம் சோதனையின் கூறுவெளியில் அடங்கியிருக்கும் ஒவ்வோர் உறுப்புக்கும் தொடர்பாகத் தனியொரு மெய்யெண்ணை வரையறை செய்யும் சார்பை **ராண்டம் மாறி** என வழங்குகிறோம்.

ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டியெறியும் முயற்சியின் கூறுவெளி

$$\Omega = \{\text{'தலை'} ; \text{'பூ'}\}$$

ஆகும்.

நிகழ்ச்சி 'தலை'க்குத் தொடர்பாக மெய்யெண் 1 நிகழ்ச்சி 'பூ'க்குத் தொடர்பாக மெய்யெண் 0 என வரையறை செய்யும் போது, இதை X சார்பு வாயிலாக

$$X(w) = 1 \qquad \text{'}w\text{'} = \text{'தலை'}$$
$$X(w) = 0 \qquad \text{'}w\text{'} = \text{'பூ'}$$

குறிப்போமெனில் X சார்பு கூறுவெளி Ω-யின் மேல் வரையறை செய்யப்படும் ஒரு ராண்டம் மாறி என அழைக்கிறோம்.

வெள்ளை, கறுப்பு, பச்சை நிறப் பந்துகள் உள்ள பையிலிருந்து ஒரு பந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டு அதன் நிறத்தைக் குறிப்பிடும் சோதனையின் கூறுவெளி

$$W = [\,\text{வெள்ளை, கறுப்பு, பச்சை}\,]$$

ஆக அமையும்.

தேர்ந்தெடுக்கப்படும் பந்து வெள்ளை நிறமாயின் அதற்குத் தொடர்பாக மெய்யெண் 0, கறுப்பு நிறமாயின் அதற்குத் தொடர்பாக மெய்யெண் 5, பச்சை நிறமாயின் அதற்குத் தொடர்பாக மெய்யெண் 20 என வரையறை செய்து இதை Y சார்பு வாயிலாக

$$Y(w) = 0 \;; \qquad w = \text{'வெள்ளை'}$$
$$Y(w) = 5 \;; \qquad w = \text{'கறுப்பு'}$$
$$Y(w) = 20 \;; \qquad w = \text{'பச்சை'}$$

எனக் குறிப்போமெனில் Y சார்பு, கூறுவெளி W-வின் மேல் வரையறை செய்யப்படும் ஒரு ராண்டம் மாறி என்கிறோம்.

ஒரு குழுவில் உள்ள 20 நபர்களை 1, 2, 3, ..., 19, 20 ஆகிய எண்கள் கொண்டு குறிப்பிடுவதாகவும், இக் குழுவிலிருந்து ஒரு நபரைத் தேர்ந்தெடுப்பதாகவும் கொள்ளும்போது உருவாகும் கூறுவெளி

$$S = [1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots, 19, 20]$$

ஆகும். இப்போது ஒவ்வொரு நபருக்கும் தொடர்பாக அவரது எடை மதிப்பை அமைப்போமெனில் இத் தொடர்பைக் குறிப்பிடும் சார்பானது கூறுவெளி S-ன் மேல் வரையறை செய்யப்படும் ராண்டம் மாறியாகும்.

பொதுவாக ராண்டம் மாறிகளை $X, Y, Z, W, T, \ldots\ldots\ldots$ ஆகிய முகட்டெழுத்துகளாலும் அம் மாறிகள் தொடர்புபடுத்தும் மெய்யெண்கள் $X(w)$, $Y(w)$, $Z(w)$, $W(w)$, $T(w)$ ஆகியவைகளை $x, y, z, w, t, \ldots\ldots$ ஆகிய சிற்றெழுத்துகளாலும் குறிப்பிடுகிறோம்.

ஊக்குவிக்கப்பட்ட நிகழ்தகவு (Induced Probability)

ஒரு ராண்டம் மாறி X-ஆனது கூறுவெளி Ω-ன் மேல் வரையறை செய்யப்பட்டுள்ளது எனவும், X-மாறி ஏற்றுக் கொள்ளும் மெய்யெண் மதிப்புகள் அடங்கிய கணம்

$$S = [x : X(w) = x, \; w \in \Omega]$$

எனவும் கொள்வோம்.

S கணத்தின் ஒரு பகுதியை A எனக் குறிப்போம். A கணத்திற்கு இணையாக அமையும் கூறுவெளி Ω-ன் பகுதி கணத்தை

$$C = [w : w \in \Omega, \; X(w) \in A]$$

எனக் குறிப்போம்.

கூறுவெளி Ω-ன் மேல் வரையறை செய்யப்பட்டுள்ள நிகழ்தகவு கணச்சார்பு Q எனில் C கணத்திற்குத் தொடர்பான நிகழ்தகவு மதிப்பு $Q(C)$ ஆகும்.

இப்போது X ராண்டம் மாறி A கணத்தில் அடங்கியுள்ள மதிப்புகளை ஏற்றுக் கொள்வதற்கான நிகழ்தகவு

$$P_X(A) = P_r\,[X(w) \in A]$$

எனக் குறிப்போமெனில் $P_X(A)$ ஆனது $Q(C)$-க்குச் சமம் என வரையறுக்கிறோம். அதாவது,

$$P_x(A) = P_r[X(w) \in A]$$
$$= P_r(C), \quad C = [w : X(w) \in A, w \in \Omega]$$
$$= Q(C)$$

ஆகும் என்கிறோம்.

இங்ஙனம் ராண்டம் மாறி X-ன் வெளியான S-ன் பகுதி கணம் A-க்குத் தொடர்பாக வரையறை செய்யப்படும் நிகழ்தகவு $P_x(A)$-ஐ **ஊக்குவிக்கப்பட்ட நிகழ்தகவு** (Induced Probability) என வழங்குகிறோம்.

இப்போது ஊக்குவிக்க நிகழ்தகவு $P_x(A)$ ஆனது கீழ்க்கண்ட நிபந்தனைகளுக்கு

(i) $P_x(A) \geq 0$

(ii) $P_x(A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots\ldots) = P_x(A_1) + P_x(A_2) + \ldots\ldots\ldots\ldots$

$A_i \subset S, i = 1, 2, \ldots\ldots \ldots\ldots$

$A_i \cup A_j = \phi, i \neq j = 1, 2, \ldots\ldots\ldots$

(iii) $P_x(S) = 1$

உட்பட்டு அமைகிறது என்பதைக் காண்போம்.

(i) $P_x(A) = P_r[X(w) \in A]$

$= P_r[w : X(w) \in A, w \in \Omega]$

$= Q(C), C = \{w : X(w) \in A, w \in \Omega\}$

$\geq 0 \quad \because$ Q-ஆனது Ω-ன் மேல் வரையறை செய்யப்படும் நிகழ்தகவு கணச்சார்பாகும்.

(ii) A_1, A_2 ஆகியன S-ன் பிரிந்த உட்கணங்கள்

$A_1 \cap A_2 = \phi, \quad A_1 \subset S, \quad A_2 \subset S$

எனக்கொள்வோம்.

$$P_x(A_1 \cup A_2) = P_r\{X(w) \in A_1 \cup A_2\}$$
$$= P_r\{w : X(w) \in A_1 \cup A_2, w \in \Omega\}$$
$$= P_r\{w : X(w) \in A_1, w \in \Omega\} \cup P_r\{w : X(w) \in A_2, w \in \Omega\}$$
$$\because A_1 \cap A_2 = \phi$$
$$= P_x(A_1) + P_x(A_2)$$

இதுபோன்றே $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots\ldots$

$A_i \cap A_j = \phi$

(iii) $P_x(S) = P_r\{X(w) \in S\}$

$= P_r\{w : X(w) \in S, w \in \Omega\}$

$= P_r\{\Omega\}$

$= 1$

ஆகின்றன.

எனவே, $P_X(A)$ ஆனது ராண்டம் மாறி X உருவாக்கும் மெய்யெண்கள் வெளி S-ன் மேல் வரையறை செய்யப்படும் நிகழ்தகவு கணச்சார்பாக அமைகிறது.

கணக்கு

A, B, C, D, E ஆகிய எழுத்துக்கள் ஒவ்வொன்றும் ஒரு பந்தின்மேல் குறிக்கப்பட்டுள்ள ஐந்து பந்துகள் ஒரு பையில் உள்ளன எனவும், A, B, C ஆகிய எழுத்துக்கள் கொண்டுள்ள மூன்று பந்துகளும் வெள்ளை நிறமானவைகள் எனவும், D, E ஆகிய எழுத்துக்கள் கொண்டுள்ள இரு பந்துகளும் கறுப்பு நிறமானவைகள் எனவும் கொள்வோம். இப் பையிலிருந்து இரு பந்துகள் எடுக்கப்படுகின்றன எனவும், இம் முயற்சியில் ஏற்படும் ஒவ்வோர் ஆதாரமான நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு 0·1 எனவும் கொள்வோம். இப்போது, ஒவ்வோர் ஆதாரமான நிகழ்ச்சியிலும் அடங்கியுள்ள வெள்ளைப் பந்துகளின் எண்ணிக்கையை அந் நிகழ்ச்சிக்குத் தொடர்புறும் மெய்யெண் என X-சார்பை வரையறுப்போமெனில், X-மாறியின் ஊக்குவிக்கப்பட்ட நிகழ்தகவு பரவலைப் பெறுவோம்.

முறை

A, B, C, D, E ஆகிய எழுத்துகள் குறிக்கப்பட்டுள்ள ஐந்து பந்துகள் உள்ள பையிலிருந்து இரு பந்துகளை எடுக்கும் முயற்சியில் பெறக்கூடிய ஆதார நிகழ்ச்சிகள்

$$w_1 = (A, B) \; ; \; w_2 = (A, C) \; ; \; w_3 = (A, D) \; ; \; w_4 = (A, E);$$
$$w_5 = (B, C) \; ; \; w_6 = (B, D) \; ; \; w_7 = (B, E) \; ; \; w_8 = (C, D);$$
$$w_9 = (C, E) \; ; \; w_{10} = (D, E)$$

ஆகின்றன. எனவே, சோதனையின் கூறுவெளி

$$\Omega = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8, w_9, w_{10}) \text{ ஆகும்.}$$

கூறுவெளி Ω-ன் மேல் வரையறுக்கப்பட்டுள்ள நிகழ்தகவு கணச்சார்பு $Q(U)$, $U \subset \Omega$ எனக் கொள்வோம். இப்போது X சார்பு, ஒவ்வோர் ஆதார நிகழ்ச்சிக்குத் தொடர்பாக அந்த ஆதார நிகழ்ச்சியில் அடங்கியுள்ள வெள்ளைப் பந்துகளின் எண்ணிக்கை அளிப்பதால்

$$\begin{array}{lll} X(w_1) = 2 & X(w_5) = 2 & X(w_9) = 1 \\ X(w_2) = 2 & X(w_6) = 1 & X(w_{10}) = 0 \\ X(w_3) = 1 & X(w_7) = 1 & \\ X(w_4) = 1 & X(w_8) = 1 & \end{array}$$

ஆக அமைகின்றன.

X மாறியின் வெளி $S = \{0, 1, 2\}$ ஆகும்.

இப்போது S-ன் உட்கணம் $A = \{0\}$ ஐ எடுத்துக்கொள்வோம். இதற்குச் சமமாக அமையும் ஆதாரமான நிகழ்ச்சிகள் அடங்கிய கணம்

$$U = \{ w_{10} \}$$

ஆகும். எனவே, A கணத்திற்கு வரையறுக்கப்படும் ஊக்குவிக்கப்பட்ட நிகழ்தகவு

$$P_x(A) = Q(U) = 0{\cdot}1$$

ஆகும். அடுத்து, $A = \{1\}$ கணத்திற்குச் சமமாக அமையும் Ω-ன் உட்கணம்

$$U = \{ w_3, w_4, w_6, w_7, w_8, w_9 \}$$

ஆகும். எனவே,

$$P_x(A) = Q(U) = \sum_{w \in U} Q(w) = 0{\cdot}6 \text{ ஆகும்.}$$

அடுத்து, $A = \{2\}$ கணத்திற்குச் சமமாக அமையும் Ω-ன் உட்கணம் $U = \{w_1, w_2, w_5\}$ ஆவதால்

$$P_x(A) = Q(U) = \sum_{w \in U} Q(w) = 0{\cdot}3 \text{ ஆகும்.}$$

ஆகவே X-மாறியின் ஊக்குவிக்கப்பட்ட நிகழ்தகவுப் பரவல்

x	$P_x(x)$
0	0·1
1	0·6
2	0·3

ஆக அமைகிறது.

கணக்கு

ஒரு ராண்டம் சோதனையின் விளைவானது (0, 2) எனும் இடைவெளியில் அமையும் ஒரு மெய்யெண் என்போம். இச்சோதனையின் கூறுவெளி

$$\Omega = [\, t : 0 < t < 2 \,] \text{ ஆகும்.}$$

கூறுவெளியின் மேல் வரையறுக்கப்பட்ட நிகழ்தகவு கணச் சார்பு

$$Q(C) = \int_C \tfrac{1}{2}\, dx, \; C \subset \Omega$$

எனக் கொள்வோம்.

இப்போது Ω-யில் அடங்கியுள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பு *t*-க்குத் தொடர்பாக மெய்யெண் $X(t) = t + 5$ என வரையறுப்பதாகக் கொள்வோம். இப்போது X மாறியின் வெளி

$$S = [X(t) : 0 < t < 2] = [t : 5 < t < 7]$$

ஆகும்.

S-ன் பகுதி கணம்

$$A = [X(t) : 6 < X(t) < 7]$$

எனில், இதற்கு இணையான கூறுவெளி Ω-யின் பகுதிக்கணம்

$$\begin{aligned} C &= [t : t \in \Omega,\ X(t) \in A] \\ &= [t : t \in \Omega,\ 6 < t + 5 < 7] \\ &= [t : t \in \Omega,\ 1 < t < 2] \end{aligned}$$

ஆகும். இக்கணத்தின் நிகழ்தகவு

$$Q(C) = \int_C \tfrac{1}{2}\, dx = \int_1^2 \tfrac{1}{2}\, dx = \tfrac{1}{2}$$

ஆகும்.

இப்போது, நிகழ்ச்சி A-யின் ஊக்குவிக்கப்பட்ட நிகழ்ச்சி

$$P_X(A) = Q(C) = \tfrac{1}{2}$$

ஆகும் என்கிறோம்.

ராண்டம் மாறி X-ன் வெளி

$$S = [t : 5 < t < 7]$$

ஆக அமைவதால், பகுதிக்கணம் A-ன் நிகழ்தகவு கணச் சார்பை

$$P_X(A) = \int_A \tfrac{1}{2}\, dx, \; A \subset S$$

என வழங்குகிறோம்.

பரவல் சார்பு (Distribution Function)

ஒருபரிமாண வெளி ராண்டம் மாறி X-ன் நிகழ்தகவு கணச் சார்பு $P_x(A)$ எனக் கொள்வோம். இப்போது கணப்பகுதி Aஐ

$$A = [t : t \leq x]$$

எடுத்துக்கொள்ளும்போது இதற்குத் தொடர்பான நிகழ்தகவு

$$P_x(A) = P_r(X \in A) = P_r(X \leq x)$$

ஆகும். x புள்ளியைச் சார்ந்துள்ள இக்கோவையைக் குறியிட்டால் $F_x(x)$ எனக் குறிப்பிடுகிறோம்.

புள்ளிச் சார்பு $F_x(x) = P_r(X \leq x)$ஐ ராண்டம் மாறி X-ன் **பரவல் சார்பு** (Distribution Function) அல்லது **குவிவு பரவல் சார்பு** (Cumulative Distribution Function) என அழைக்கிறோம்.

ஒரு ராண்டம் மாறி X-ன் பரவல் சார்பு $F_x(x)$-ன் பண்புகள் பின்வருமாறு:

(i) $F_x(-\infty) = 0$

(ii) $F_x(+\infty) = 1$

(iii) $0 \leq F_x(x) \leq 1$, x ஒரு மெய்யெண் ஆகும்.

(vi) $F_x(x)$ ஒரு குறைவுறுத சார்பாகும். அதாவது a, b ஆகியன $a < b$ என அமையும் மெய்யெண்கள் எனில்,

$$F_x(b) - F_x(a) \geq 0$$

ஆகும்.

(v) $F_x(x)$ ஆனது ஒவ்வொரு மெய்யெண் x மதிப்பு குறித்து, வலது தொடர்ச்சியான சார்பாகும்.

இப்போது, ராண்டம் மாறி Xஆனது மெய்யெண் 'a' மதிப்பை ஏற்றுக்கொள்வதற்கான நிகழ்தகவு

$$P_r(X=a) = P_x(a)$$

ஆகும். இதை X-ன் பரவல் சார்பு வாயிலாக

$$P_x(a) = F_x(a) - F_x(a^-)$$

எனக் குறிப்பிடுகிறோம். இங்கு $F_x(a^-) = \lim_{\epsilon \to 0} F_x(a-\epsilon)$ ஆகும்.

$F_x(x)$ ஆனது, புள்ளி a-ல் தொடர்ச்சியானதாயின் $F_x(a^-) = F_x(a)$ ஆக அமைவதால்

$$P_x(a) = F_x(a) - F_x(a) = 0$$

ஆகும்.

$F_X(x)$ ஆனது, புள்ளி a-ல் தொடர்ச்சியற்றதாயின் $[F_X(a) - F_X(a^-)]$ எனும் கோவையானது புள்ளி a-ல் பரவல்சார்பு $F_X(x)$ உயரும் மதிப்பைக் குறிக்கும். இதைப் புள்ளி a-ல் X மாறி பெறும் **நிகழ்தகவுத் திணிவு** என வழங்குகிறோம்.

தனித்த நிகழ்தகவுப் பரவல் (Discrete Probability Distribution)

$x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ ஆகிய முடிவுள்ள எண்ணிக்கைகொண்ட மெய்யெண்கள்

$$x_1 < x_2 < \ldots\ldots < x_n$$

எனும் நிபந்தனைக்குட்பட்டு அமைவதாகக் கொள்வோம்.

மேலும்,
$$A_0 = [x: -\infty < x < x_1]$$
$$A_k = [x: x_k \leq x < x_{k+1}], \quad k = 1, 2, \ldots, (n-1)$$
$$A_n = [x: x_n \leq x < \infty]$$
எனக் கொள்வோம்.

ஒரு ராண்டம் மாறி X-ன் பரவல் சார்பு $F_X(x)$ ஆனது $X_1, X_2, \ldots\ldots X_n$ ஆகிய புள்ளிகளில் தொடர்ச்சியற்ற சார்பாகவும்

$F_X(x) = a_k$, $x \in A_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots\ldots n$ ஆகிய மதிப்புகளைப் பெறுவதாகவும் கொள்வோம். மேலும் $a_0, a_1, \ldots\ldots a_k, \ldots\ldots a_n$ ஆகியன வேறுபட்ட மதிப்புகளையுடைய நிலையெண்களாகவும் அமைகின்றன என்போம்.

பரபல் சார்பு $F_X(x)$ குறைவுறுத சார்பானதால் $a_0, a_1, \ldots\ldots a_k, \ldots\ldots a_n$ ஆகிய நிலையெண்கள்

$a_0 < a_1 < \ldots\ldots < a_k < \ldots\ldots < a_{n-1} < a_n$ எனும் நிபந்தனைக் குட்பட்டு அமைகின்றன. இவ்வாறு அமையப்பெறும் சார்பை **படிச் சார்பு** (Step function) என அழைக்கிறோம்.

$F_X(\infty) = 1$, $F_X(-\infty) = 0$ ஆக அமைவதால் $a_0, a_1, \ldots\ldots a_k \ldots\ldots a_n$ ஆகியன கீழ்க்கண்ட நிபந்தனைக்குட்பட்டு

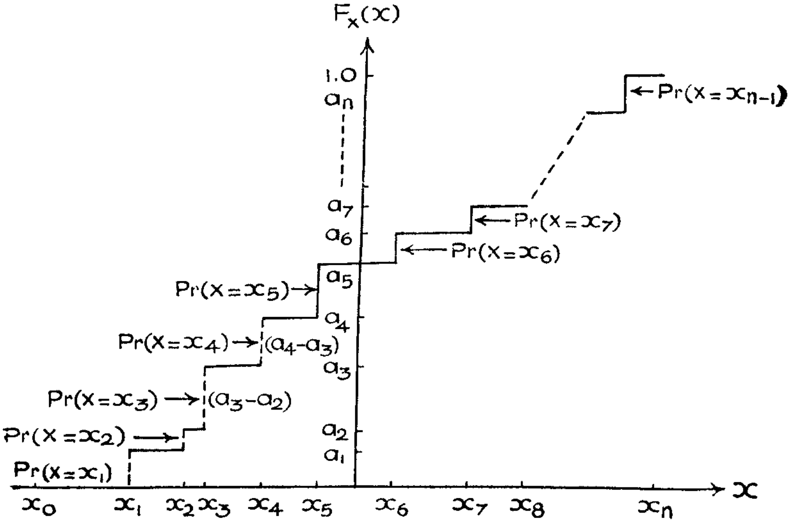
$$0 \leq a_0 < a_1 < \ldots\ldots\ldots < a_n \leq 1$$

அமைகின்றன. ஒரு ராண்டம் மாறியின் பரபல் சார்பு இவ்வாறாக அமையுமெனில் அம்மாறியை **தனித்த ராண்டம் மாறி** என வரையறை செய்கிறோம்.

பரவல் சார்பு $F_X(x)$ ஆனது $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ ஆகிய புள்ளிகளில் உயரும் மதிப்புகள் முறையே $(a_1 - a_0)$, $(a_2 - a_1)$, $\ldots\ldots (a_n - a_{n-1})$ ஆகின்றன. இப்போது ராண்டம் மாறி X ஆனது மெய்யெண் X_1ஐ ஏற்றுக் கொள்வதற்கான நிகழ்தகவுத் திணிவு

$$f_X(x_i) = P_r(X = x_i) = (a_i - a_{i-1}), \quad i = 1, 2, \ldots n \text{ எனவும்,}$$
$$f_X(x) = P_r(X = x) = 0, \quad x \notin \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$$

எனவும் பெறுகிறோம்.



படம் 2.1

நிகழ்தகவுப் பரவல் சார்பு

$x_1, x_2, \ldots\ldots x_{n-1}, x_n$ ஆகிய மதிப்புகளுக்கு இணையாக அமையும் நிகழ்தகவு மதிப்புகளை X ராண்டம் மாறியின் **தனித்த நிகழ்தகவுப் பரவல்** எனவும், $f_X(x)$ஐ X மாறியின் **தனித்த நிகழ்தகவுத் திணிவுச் சார்பு** எனவும் வழங்குகிறோம்.

$x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$ ஆகிய எண்ணிடத்தக்க மெய்யெண்கள் $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots$ எனும் நிபந்தனைக்கு உட்பட்டு அமைவதாகவும், ராண்டம் மாறி X-ன் பரவல் சார்பு $F_X(x)$ ஆனது $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n, \ldots\ldots$ ஆகிய புள்ளிகளில் தொடர்பற்றதாகவும் கொள்வோம். இப்போது X-மாறியின் தனித்த நிகழ்தகவுத் திணிவுப் பரவல்

$$f_X(x_i) = P_r(x = x_i) = F_X(x_i) - F_X(\bar{x}_i), \quad i = 1, 2, \ldots$$
$$f_X(x) = P_r(X = x) = o, \; x \notin \{x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots\}$$ ஆக அமைகின்றது.

எடுத்துக்காட்டு 1.

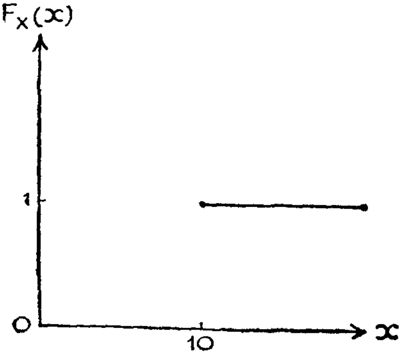
ராண்டம் மாறி X-ன் பரவல் சார்பு

$$F_X(x) = 0, \quad x < 10$$
$$= 1, \quad x \geq 10$$

எனக் கொள்வோம். இச்சார்பு $x = 10$ எனும் புள்ளியில் தொடர்பற்றதாகவும், குறைவுறுத படிச்சார்பாகவும், $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$ ஆகவும் அமைகிறது. எனவே, X-மாறியின் பரவல் ஒரு தனித்த நிகழ்தகவுப் பரவலாகும். இப்போது

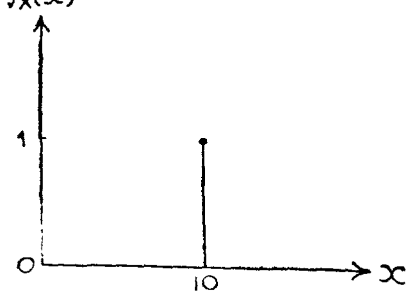
$$f_X(10) = F_X(10) - F_X(10-) = 1-0 = 1$$

ஆகும்.



படம் 2.2 (a)

நிகழ்தகவுப் பரவல் சார்பு



படம் 2.2 (b)

நிகழ்தகவுத் திணிவுப் பரவல்

எனவே, X-மாறியின் நிகழ்தகவுத் திணிவுச் சார்பு

$$\begin{aligned} f_X(x) &= 1, \quad x = 10 \\ &= 0, \quad \text{மற்றபடி} \end{aligned}$$

ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.

ராண்டம் மாறி Z-ன் பரவல் சார்பு

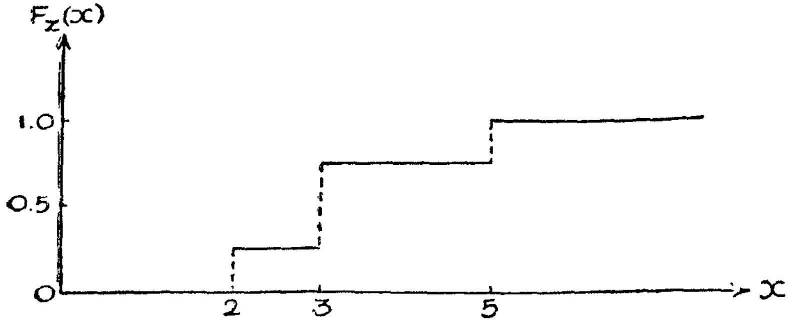
$$\begin{aligned} F_Z(x) &= 0, \quad x < 2 \\ &= \tfrac{1}{4}, \quad 2 \le x < 3 \\ &= \tfrac{3}{4}, \quad 3 \le x < 5 \\ &= 1, \quad x \ge 5 \end{aligned}$$

எனக் கொள்வோம். இச்சார்பு 2, 3, 5 ஆகிய புள்ளிகளில் தொடர்பற்றதாகவும், குறைவுறாத படிச்சார்பாகவும், $F(-\infty)=0$, $F(+\infty) = 1$ ஆகிய நிபந்தனைகளுக்கு உட்பட்டதாகவும் அமைகிறது. எனவே, Z-மாறியின் பரவல் ஒரு தனித்த பரவலாகும்.

இப்போது

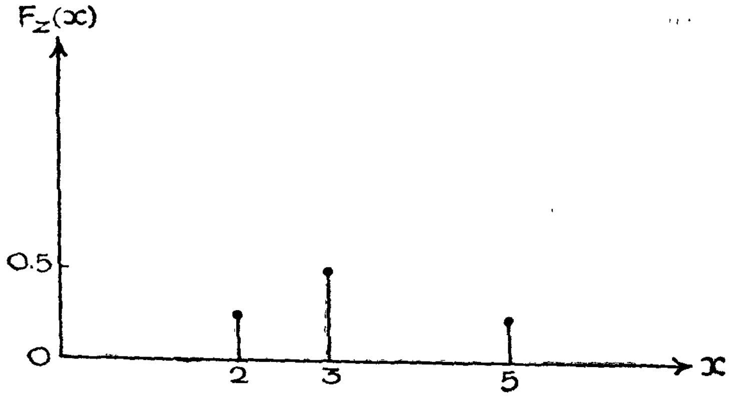
$$\begin{aligned} f_Z(2) &= F_Z(2) - F_Z(2-) = \tfrac{1}{4} - 0 = \tfrac{1}{4} \\ f_Z(3) &= F_Z(3) - F_Z(3-) = \tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2} \\ f_Z(5) &= F_Z(5) - F_Z(5-) = 1 - \tfrac{3}{4} = \tfrac{1}{4} \\ f_Z(x) &= 0, \quad \text{மற்றபடி} \end{aligned}$$

ஆகின்றன.



படம் 2.3 (a)

நிகழ்தகவுப் பரவல் சார்பு



படம் 2.3 (b)

நிகழ்தகவுத் திணிவுப் பரவல்

எனவே Z-மாறியின் நிகழ்தகவுத் திணிவுப் பரவல்

$$\begin{aligned} f_Z(x) &= \tfrac{1}{4}, \quad x = 2 \\ &= \tfrac{1}{2}, \quad x = 3 \\ &= \tfrac{1}{4}, \quad x = 5 \\ &= 0, \quad \text{மற்றபடி} \end{aligned}$$

ஆகும்.

ஒரு தனித்த ராண்டம் மாறி X-ன் நிகழ்தகவுத் திணிவுப் பரவல் $f_X(x)$ எனில், அதன் பரவல் சார்பு

$$F_X(t) = \sum_{x \leq t} f_X(x)$$

ஆகும்.

இப்போது, $F_X(\infty) = 1$ ஆக அமைவதால்

$$\sum_{x \leq \infty} f_X(x) = 1$$

அதாவது $f_X(x_1) + f_X(x_2) + \ldots\ldots = 1$ என்கிறோம்.

ஒரு தொடர்ச்சியற்ற புள்ளி சார்பு $h(x)$ கீழ்க்கண்ட இரு நிபந்தனைகளுக்குட்பட்டு

(i) $h(x) \geq 0$, $-\infty < x < \infty$

(ii) $h(x_1) + h(x_2) + \ldots\ldots = 1$

அமையின் அது ஒரு நிகழ்தகவுத் திணிவுச் சார்பாகும்.

கணக்கு

ராண்டம் மாறி X-ன் நிகழ்தகவுத் திணிவுச் சார்பு

$$f(x) = a\left(\tfrac{2}{3}\right)^x, \quad x = 1, 2, 3, \ldots$$
$$= 0, \quad \text{மற்றபடி}$$

எனில், நிலையெண் a-யின் மதிப்பைப் பெறுக.

இப்போது

$$\sum_x f(x) = \sum_{x=1}^{\infty} a\left(\tfrac{2}{3}\right)^x$$
$$= a\left[\left(\tfrac{2}{3}\right) + \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 + \left(\tfrac{2}{3}\right)^3 + \ldots\ldots\right]$$
$$= 2a$$

ஆகும்.

X-மாறியின் நிகழ்தகவுத் திணிவு மதிப்புகளின் கூடுதல்

$$\sum_x f(x) = 1$$

ஆக அமைய வேண்டுமாதலால்

$$2a = 1 \quad \text{ஆகும்.}$$

அதாவது $a = \frac{1}{2}$

எனப் பெறுகிறோம்.

கணக்கு

U-மாறியின் நிகழ்தகவுத் திணிவுச் சார்பு

$$g_u(x) = \frac{x}{15}, \quad x = 1, 2, 3, 4, 5.$$
$$= 0, \text{ மற்றபடி}$$

எனில், (i) U-யின் பரவல் சார்பு, (ii) Uஆனது இடைவெளி (2·5, 4·3)-யில் அடங்கியிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு மதிப்பு ஆகியவைகளைப் பெறுக.

முறை

(i) U-யின் பரவல் சார்பு

$$G_u(t) = \sum_{x \leq t} \frac{x}{15}$$
$$= 0, \quad t < 1$$
$$= \tfrac{1}{15}, \quad 1 \leq t < 2$$
$$= \tfrac{3}{15}, \quad 2 \leq t < 3$$
$$= \tfrac{6}{15}, \quad 3 \leq t < 4$$
$$= \tfrac{10}{15}, \quad 4 \leq t < 5$$
$$= 1, \quad t \geq 5$$

ஆகும்.

(ii) U ஆனது இடைவெளி (2·5, 4·3)-யில் அடங்கியிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு மதிப்பு

$$P_r(2{\cdot}5 < U < 4{\cdot}3) = G_u(4{\cdot}3) - G_u(2{\cdot}5)$$
$$= \frac{10}{15} - \frac{3}{15} = \frac{7}{15}$$

ஆகும்.

தொடர்ச்சியான நிகழ்தகவுப் பரவல் (Continuous Probability Distribution)

ஒரு ராண்டம் மாறியின் பரவல் சார்பு தொடர்ச்சியான சார்பாக அமையுமெனில் அம்மாறியை **தொடர்ச்சியான ராண்டம் மாறி** என அழைக்கிறோம்.

ராண்டம் மாறி X-யின் பரவல் சார்பு $F_X(x)$ எனவும், a, b ஆகிய மெய்யெண்கள் $a < b$ எனும் நிபந்தனைக்குட்பட்டு அமைகின்றன எனவும் கொள்வோம்.
இப்போது

$$\frac{F_x(b) - F_x(a)}{(b - a)}$$

எனும் கோவை, ராண்டம் மாறி X ஆனது இடைவெளி (a, b)-யில் அடங்கியிருப்பதற்கான சராசரி நிகழ்தகவு மதிப்பைக் குறிப்பிடுகிறது. b ஆனது aஐ அணுகும்போது, கோவையின் எல்லை

$$\underset{b \to a}{Lt} \frac{F_x(b) - F_x(a)}{(b - a)}$$

உளதாயிருக்குமெனில் அம்மதிப்பை $f_x(a)$ எனக்குறிப்பிடுவோம். இதை, புள்ளி 'a'-க்கு இணையாக அமையும், X-மாறியின் **நிகழ்தகவு அடர்த்தி** (Probability density) என வழங்குகிறோம்.

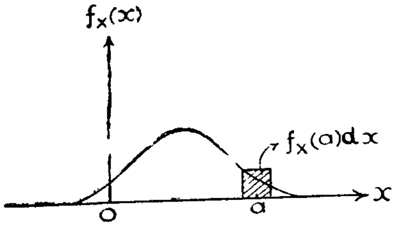
$$f_x(x) = \frac{d}{dx}\left[F_x(x)\right]\text{ஐ}$$

ராண்டம் மாறி X-ன் **நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு** என வழங்குகிறோம். X-ன் பல்வேறு மதிப்புகளுக்கு இணையான $f_x(x)$-ன் மதிப்புகளை ராண்டம் மாறி X-ன் தொடர்ச்சியான **நிகழ்தகவுப் பரவல்** எனவும் அழைக்கிறோம்.

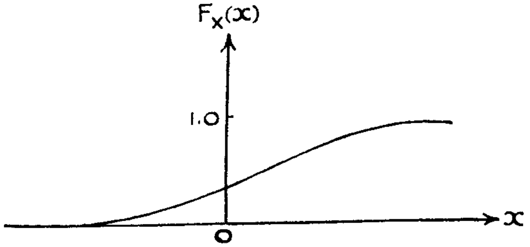
dx ஆனது மிகச்சிறிய மிகையெண் எனக் கொண்டு X-மாறியானது இடைவெளி $(a, a + dx)$-யில் அடங்கியிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு மதிப்பை X-ன் அடர்த்திச் சார்பு வாயிலாக

$$P_r\,(a < X < a + dx) = f_x(a) \cdot dx$$

எனக் குறிப்பிடுகிறோம்.



படம் 2.4 (a)
நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்



படம் 2.4 (b)
நிகழ்தகவுப் பரவல் சார்பு

ஒரு தொடர்ச்சியான ராண்டம் மாறி X-ன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f_X(x)$ எனில், அதன் பரவல் சார்பு

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x) \cdot dx$$

ஆகும். இப்போது

$$F_X(\infty) = 1$$

ஆக அமைவதால்

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot dx = 1$$

ஆகும்.

ஒரு தொடர்ச்சியான புள்ளி சார்பு $h(x)$, கீழ்க்கண்ட இரு நிபந்தனைகளுக்குட்பட்டு

(i) $h(x) \geq 0, \quad -\infty < x < \infty$

$$\text{(ii)} \quad \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \cdot dx = 1$$

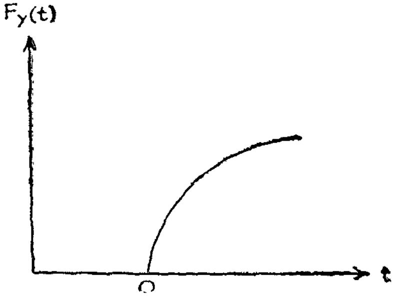
அமையின் அது ஒரு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பாகும்.

எடுத்துக்காட்டு

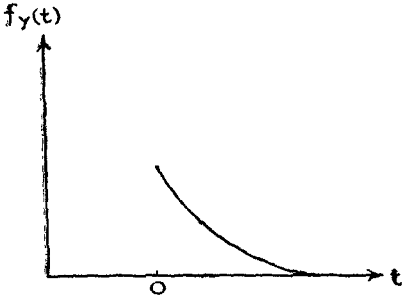
Y-மாறியின் பரவல் சார்பு

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= 0 \,, \quad t < 0 \\ &= 1 - e^{-t} \,, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

எனக் கொள்வோம். இச்சார்பு தொடர்ச்சியான சார்பாகும் எனவே, Y-மாறியின் பரவல் ஒரு தொடர்ச்சியான பரவலாகும்.



படம் 2.5 (a)
நிகழ்தகவுப் பரவல் சார்பு



படம் 2.5 (b)
நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

Y-மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு,

$$f_y(t) = \frac{d}{dt}\left[F_Y(t) \right]$$
$$= \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{-t}, & t \geq 0 \end{cases}$$

ஆகும்.

கணக்கு

Y-மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$$f_Y(x) = ax, \quad 0 < x < 3$$
$$= 0, \text{ மற்றபடி}$$

எனில், நிலையெண் a-ன் மதிப்பையும் Y-ன் பரவல் சார்பையும் அடைக.

முறை

இப்போது

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f_y(x) \cdot dx = \int_{0}^{3} ax \cdot dx = \frac{9a}{2}$$

ஆகும். ஆனல்

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f_y(x) \cdot dx = 1$$

ஆக அமைவதால் $\frac{9a}{2} = 1$, அதாவது $a = \frac{2}{9}$ எனப் பெறுகிறோம்.

Y-மாறியின் பரவல் சார்பு

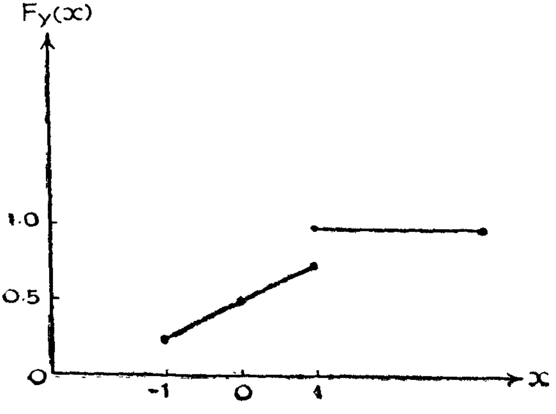
$$(F_Y\, t) = \int_{-\alpha}^{t} f_x(x) \cdot dx$$
$$= 0, \quad t < 0$$
$$= \int_{0}^{t} \frac{2}{9}\, x \cdot dx = \frac{t^2}{9}, \quad 0 < t < 3$$
$$= 1, \quad t > 3$$

ஆகும்.

ராண்டம் மாறிகளின் பரவல் சார்புகள், தனித்த பரவல் சார்பு, தொடர்ச்சியான பரவல் சார்பு ஆகியவைகளின் கலவையாகவும் அமைகின்றன. எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு ராண்டம் மாறி Y-ன் பரவல் சார்பு

$$F_Y(x) = 0, \quad x < -1$$
$$= \frac{x+2}{4}, \quad -1 \le x < 1$$
$$= 1, \quad x \ge 1$$

இப்பரவல் சார்பு $x = -1$, $x = 1$ ஆகிய புள்ளிகளில் தொடர்ச்சியற்ற சார்பாக அமைகிறது; ஆனால் இது படிச்சார்பாக அமையவில்லை. ஆகவே,



படம் 2.6
பரவல் சார்பு

இதைத் தனித்த பரவல் சார்பெனக் கொள்வதற்கில்லை. இச் சார்பு $(-1, 1)$ இடைவெளியில் தொடர்ச்சியானதாக அமைகிறது. எனவே, இதைத் தனித்த பரவல் சார்பு, தொடர்ச்சியான பரவல் சார்பு ஆகியவைகளின் கலவை என்கிறோம்.

ராண்டம் மாறியின் சார்பு (Function of Random Variable)

ஒரு ராண்டம் மாறி X ஆனது S வெளியின் மேல் வரையறை செய்யப்பட்டுள்ளது எனவும், X-மாறியின் சார்பு $Y = \phi(x)$ எனவும் கொள்வோமெனில் Y ஒரு ராண்டம் மாறியாக அமைகிறது.

Y-யின் வெளி

$$T = [y : y = \phi(x) \,,\; x \in S]$$

ஆகவும், அதன் பரவல் சார்பு

$$G_Y(y) = P_r(Y \leqslant y)$$
$$= P_r(\phi(X) \leqslant y)$$

ஆகவும் அமைகின்றன.

கணக்கு 1.

Y-மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்

$$f_Y(x) = \tfrac{1}{2}\,,\quad -1 < x < 1$$
$$= 0\,,\quad \text{மற்றபடி}$$

எனில், $Z = Y^2$ மாறியின் பரவலைப் பெறுக.

முறை

Y-மாறியின் வெளி

$$S = [x : -1 < x < 1]$$

எனில், $Z = Y^2$ மாறியின் வெளி

$$T = [t : 0 < t < 1]$$

ஆகும். Z-மாறியின் பரவல் சார்பு

$$G_Z(t) = P_r[y^2 \leqslant t] = P_r[-\sqrt{t} \leqslant y \leqslant \sqrt{t}]$$
$$= 0\,,\quad t < 0$$
$$= \int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} \tfrac{1}{2}\,dx = \sqrt{t}\,,\quad 0 < t < 1$$
$$= 1\,,\quad t \geq 1$$

ஆகும்.

Y-மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்

$$g_y(t) = \frac{d}{dt}\left[G_Y(t)\right]$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{t}}\,,\quad 0 < t < 1$$
$$= 0\,,\quad \text{மற்றபடி}$$

ஆகும்.

கணக்கு 2.

X-மாறியின் நிகழ்தகவுத் திணிவுச் சார்பு

$$f_X(x) = \frac{x}{6}, \quad x = 1, 2, 3$$
$$= 0, \text{ மற்றபடி}$$

எனில், $Y = 2X - 3$ மாறியின் நிகழ்தகவுப் பரவலைப் பெறுக.

முறை

$Y = 2X - 3$ மாறியின் பரவல் சார்பு

$$\begin{aligned} G_Y(y) &= P_r[Y \leqslant y] \\ &= P_r[2X - 3 \leqslant y] \\ &= P_r\left[X \leqslant \frac{y+3}{2}\right] \\ &= 0, \quad y < -1, \\ &= \tfrac{1}{6}, \quad -1 \leqslant y < 1 \\ &= \tfrac{1}{2}, \quad 1 \leqslant y < 3 \\ &= 1, \quad y \geq 3 \end{aligned}$$

ஆகும்.

Y-மாறியின் நிகழ்தகவுப் பரவல்

$$\begin{aligned} G_Y(y) &= \tfrac{1}{6}, \quad y = -1 \\ &= \tfrac{1}{3}, \quad y = 1 \\ &= \tfrac{1}{2}, \quad y = 3 \\ &= 0, \quad \text{மற்றபடி} \end{aligned}$$

ஆகும்.

எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு (Expected Value)

வரையறை

தனித்த ராண்டம் மாறி X-ன் நிகழ்தகவுத் திணிவுப் பரவல் $f_X(x)$ எனக் கொள்வோம். X-ன் சார்பு $g(x)$ கீழ்க்கண்ட நிபந்தனைக் குட்பட்டு

$$\sum_x f_X(x) \mid g(x) \mid < \infty$$

அதாவது $\sum_x f_X(x) \cdot g(x)$ தனி ஒருங்குத் தொடராக அமையுமாயின், $\sum_x f(x) \cdot g(x)$ எனும் கோவையை, $g(x)$-ன் **எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு**

(Expected Value) என வரையறை செய்கிறோம். இதைக் குறியீட்டால் $E[g(x)]$ எனக் குறிப்பிடும்போது

$$E[g(x)] = \sum_{x} f_x(x) \cdot g(x)$$

ஆகும்.

தொடர்ச்சியான ராண்டம் மாறி X-ன் நிகழ்தகவு திணிவுப் பரவல் $f_x(x)$ எனக் கொள்வோம்.

X-ன் சார்பு $g(x)$ கீழ்க்கண்ட நிபந்தனைக்குட்பட்டு

$$\int_{-\infty}^{\infty} | g(x) | f_x(x) \cdot dx < \infty$$

அமையின்

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_x(x) \cdot dx$$

எனும் தொகையை ராண்டம் மாறி $g(x)$-யின் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு என வரையறை செய்கிறோம். இதைக் குறியீட்டால் $E[g(x)]$ எனக் குறிப்பிடும்போது

$$E[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_x(x) \cdot dx$$

ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு

X-மாறியின் நிகழ்தகவு திணிவுச் சார்பு

$$f_x(x) = \frac{x}{10}, \quad x = 1, 2, 3, 4$$
$$= 0, \quad \text{மற்றபடி}$$

எனக் கொள்வோம். $g(x) = x^3$ சார்பின் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு

$$E[g(x)] = E(x^3) = \sum_{x} x^3 f_x(x)$$

$$= \sum_{x=1}^{4} x^3 \left(\frac{x}{10}\right)$$

$$= \frac{1}{10}[1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4] = \frac{354}{10}$$

$$= 35{\cdot}4$$

ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு

X-மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$$f_X(x) = \frac{2x}{3}, \quad 1 < x < 2$$

$$= 0, \quad \text{மற்றபடி}$$

எனில், $g(x) = \log_e x$-யின் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு

$$E[\log_e x] = \int_1^2 \log_e x \cdot \left(\frac{2x}{3}\right) dx$$

$$= \tfrac{2}{3} \int_1^2 x \cdot \log_e x \cdot dx$$

$$= \tfrac{2}{3} \left[2 \log 2 - \int_1^2 \frac{x}{2} \cdot dx \right]$$

$$= \tfrac{4}{3} \log 2 - \tfrac{1}{2}$$

ஆகும்.

கணக்கு

V-மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்

$$f_V(v) = \frac{1}{v^2}, \quad 1 < v < \infty$$

$$= 0, \quad \text{மற்றபடி}$$

தொகை $\int_1^\infty v \left(\frac{1}{v^2}\right) dv = \underset{b \to \infty}{Lt} \int_1^b \left(\frac{1}{v}\right) dv$

$$= \underset{b \to \infty}{Lt} \log b$$

$$= \infty$$

எனவே, *V*-யின் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு $E(V)$ ஆனது உளதாயில்லை என்கிறோம்.

கணக்கு

X-மாறியின் நிகழ்தகவுத் திணிவுப் பரவல்

$$p\,(X_k) = \frac{1}{2^k}\,,\ x_k = \frac{(-1)^k\,2^k}{k}\,,\quad k = 1, 2, \ldots\ldots$$
$$= 0\,,\ \text{மற்றபடி}$$

என்போம்.

$$\text{இப்போது,}\ \sum_{X_k} |\,x_k\,|\ p\,(X_k) = \sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\right) = \infty$$

ஆக அமைவதால் *X*-மாறியின் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு உளதா யில்லை என்கிறோம்.

கீழ்க்கண்ட தேற்றங்களில் ராண்டம் மாறிகள் தொடர்ச்சி யானவை எனக் கொண்டு தெரிப்புகள் பெறுகின்றோம். தனித்த ராண்டம் மாறிகளுக்கான தெரிப்புகளை இதுபோன்றே பெறலாம்.

தேற்றம் 1.

'a' ஒரு நிலையெண் எனில், அதன் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு $E\,(a) = a$ ஆகும்.

தெரிப்பு

ராண்டம் மாறி *X*-ன் நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல் $f_x\,(x)$ என்போம். *X*-ன் சார்பு $g\,(x) = a$ எனில்,

$$E\,(a) = E\,[\,g(x)\,] = \int_{-\infty}^{\infty} g\,(x)\cdot f_x\,(x)\cdot dx$$

$$= a \int_{-\infty}^{\infty} f_x\,(x)\cdot dx$$

$$= a \qquad \because \int_{-\infty}^{\infty} f_x\,(x)\cdot dx = 1$$

2̃61615
BT3
(13)31L1

ஆகும்.

தேற்றம் 2.

'b' ஒரு நிலையெண் என்போம். ராண்டம் மாறி *X*-ன் சார்பு $g(x)$ எனில், $[\,b\cdot g(x)\,]$-ன் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு,

$$E\,[\,b\cdot g(x)\,] = b\cdot E\,[\,g(x)\,]$$

ஆகும்.

தெரிப்பு

$h(x) = b \cdot g(x)$ ஆனது X-ன் சார்பாகும்.

$$E[h(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \cdot f(x) \cdot dx$$

$$= b \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x) \cdot dx$$

$$= b \cdot E[g(x)]$$

தேற்றம் 3.

a_1, a_2 ஆகியன நிலையெண்கள் எனவும், $g_1(x)$, $g_2(x)$ ஆகியவைகள் ராண்டம் மாறி X-ன் சார்புகள் எனவும் கொள்வோம். அப்போது $[a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x)]$ சார்பின் எதிர் பார்க்கும் மதிப்பு,

$$E[a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x)] = a_1 E[g_1(x)] + a_2 E[g_2(x)]$$

ஆகும்.

தெரிப்பு

$$E[a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} [a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x)] f(x) \cdot dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} a_1 g_1(x) \cdot f(x) \cdot dx + \int_{-\infty}^{\infty} a_2 g_2(x) \cdot f(x) \cdot dx$$

$$= a_1 E[g_1(x)] + a_2 E[g_2(x)]$$

துணைத்தேற்றம்

a_1, a_2, ... a_k ஆகியவைகள் நிலையெண்கள் எனவும், $g_1(x)$, $g_2(x)$, ... $g_k(x)$ ஆகியவைகள் ராண்டம் மாறிகளின் சார்புகள் எனவும் கொள்ளும்போது

$\left[\sum_{i=1}^{k} a_i g_i(x) \right]$-ன் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு,

$$E\left[\sum_{i=1}^{k} a_i g_i(x) \right] = \sum_{i=1}^{k} a_i E[g_i(x)]$$

ஆகும்.

வரையறை

X ஒரு ராண்டம் மாறியெனவும், K ஒரு மிகை முழு எண் எனவும் கொள்வோம். இப்போது, X^k-ன் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு $E(X^k)$ஐ ராண்டம் மாறி X-ன் **K-வது விலக்கப் பெருக்குத் தொகை** (Moment of order K) என வரையறை செய்கிறோம். இதைக் குறியீட்டால் m_K எனக் குறிப்பிடும்போது

$$m_k = E(X^k)$$

ஆகும்.

X ஒரு தனித்த ராண்டம் மாறியெனவும், அதன் நிகழ்தகவுத் திணிவுப் பரவல்

$$P_r(X = x_i) = f_x(x_i), \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

எனவும் கொள்ளும்போது,

$$m_k = \sum_i x_i^k f_x(x_i)$$

ஆகவும், X ஒரு தொடர்ச்சியான மாறியெனவும், அதன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f_x(x)$ எனவும் கொள்ளும்போது,

$$m_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_x(x) \cdot dx$$

ஆகவும் அமைகிறது.

ராண்டம் மாறியின் முதல் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை m_1ஐ

$$m_1 = E(X)$$

அதன் **கூட்டுச் சராசரி** (Arithmetic Mean) என வழங்குகிறோம்.

இப்போது, $(X - m_1)^k$-ன் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பை X-மாறியின் **K-வது நடுவிலக்கப் பெருக்குத் தொகை** (Central Moment of order K) என வரையறை செய்கிறோம். இதைக் குறியீட்டால் μ_k எனக் குறிப்பிடும்பொழுது,

$$\mu_k = E(X - m_1)^k$$

என ஆகும்.

ராண்டம் மாறியின் முதல் நடுவிலக்கப் பெருக்குத் தொகை μ_1 பூச்சியமாகும்.

ராண்டம் மாறியின் இரண்டாவது நடுவிலக்கப் பெருக்குத் தொகையை அதன் **மாறுபாடு** (Variance) என அழைக்கிறோம். இதைக் குறியீட்டால் σ^2 எனக் குறிப்பிடும்பொழுது,

$$\sigma^2 = E[X - m_1]^2 .$$

எனக் குறிக்கிறோம். மாறுபாட்டின் வர்க்க மூலத்தை,

$$\sigma = \sqrt{E[X - m_1]^2}$$

என்று குறிக்கிறோம். இதனைத் **திட்ட விலக்கம்** (Standard Deviation) என அழைக்கிறோம்.

ராண்டம் மாறியின் இரண்டாவது, மூன்றாவது, நான்காவது நடு விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளைக் கொண்டு அமைக்கும் கீழ்க் கண்ட விகிதங்களான,

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = \frac{[E(X - E(x))^3]^2}{[E(X - E(x))^2]^3}$$

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{E(X - E(x))^4}{[E(X - E(x))^2]^2}$$

என்பவைகளை முறையே **முதலாவது, இரண்டாவது பீட்டா கெழுக்கள்** (First and Second Beta Coefficients) என அழைக்கிறோம்.

இப்போது ஒரு ராண்டம் மாறியின் K-வது ($K \geq 2$) நடுவிலக்கப் பெருக்குத் தொகை μ_k ஐ m_k, m_{k-1}, m_{k-2}, ... m_1 ஆகிய விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் வாயிலாகக் கீழ்க் கண்டவாறு பெறுகிறோம்.

$$\begin{aligned}
\mu_k &= E(X - m_1)^k \\
&= E\Big[X^k - \binom{k}{1} X^{k-1} m_1 + \binom{k}{2} X^{k-2} m_1^2 - \dots \\
&\qquad \dots \pm \binom{k}{k-2} X^2 m_1^{k-2} \mp \binom{k}{k-1} X m_1^{k-1} \\
&\qquad \pm m_1^k \Big] \\
&= m_k - \binom{k}{1} m_{k-1} m_1 + \binom{k}{2} m_{k-2} m_1^2 - \dots\dots \\
&\qquad \pm \binom{k}{k-2} m_2 m_1^{k-2} \mp (k-1) m_1^k .
\end{aligned}$$

விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பு (Moment Generating function)

h ஒரு மிகைமெய்யெண் எனக் கொள்வோம்.

t ஆனது $-h < t < h$ என அமையும்போது X ராண்டம் மாறியின் சார்பு e^{tx}-ன் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு $E(e^{tx})$ உளதாயிருக்கும் எனில், அதை ராண்டம் மாறி X-ன் **விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு** என அழைக்கிறோம்.

இப்போது,

$$e^{tx} = 1 + tx + \frac{t^2x^2}{2!} + \frac{t^3x^3}{3!} + \cdots$$

என அமைவதால்,

$$E(e^{tx}) = E\left[1 + tx + \frac{t^2x^2}{2!} + \frac{t^3x^3}{3!} + \cdots\right]$$

$$= 1 + t\,E(x) + \frac{t^2}{2!}E(x^2) + \frac{t^3}{3!}E(x^3) + \cdots$$

எனப் பெறுகிறோம். இங்கு $\frac{t^r}{r!}$-ன் கெழு $(r = 0, 1, 2, \ldots)$ ராண்டம் மாறி X-ன் r-வது விலக்கப் பெருக்குத் தொகை m_r ஆக அமைகிறது. X-மாறியின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பைக் குறியீட்டால் $M_X(t)$ எனக் குறிப்போம்.

X தொடர்ச்சியான மாறியெனில்

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\cdot f(x)\cdot dx, \quad -h < t < h$$

ஆகவும், அது தனித்த மாறியெனில்

$$M_X(t) = \sum_i e^{tx_i} f(x_i), \quad -h < t < h$$

ஆகவும் அமைகின்றது.

$M_X(t)$ சார்பின் r-வது வகைக்கெழு (r^{th} derivative), $r = 1, 2, \ldots$

$$\frac{d^r M_X(t)}{dt^r} = M_X^r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r\cdot e^{tx}\cdot f(x)\cdot dx \text{ அல்லது}$$

$$= \sum_x x^r\cdot e^{tx}\cdot f(x) \text{ ஆகும்.}$$

இங்கு $t = 0$ எனக் கொள்ளும்போது,

$$M_x^r(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r \cdot f(x) \cdot dx \text{ அல்லது}$$

$$= \sum_x x_i^r \cdot f(x)$$

ஆகும். அதாவது $M_x^r(0) = E(x^r)$.

எனவே, விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு $M_X(t)$-ஐ r முறைகள் $(r = 1, 2, \ldots)$ வகைப்படுத்திப் பெறும் கோவையில் t-க்குப் பூச்சிய மதிப்பைப் பிரதியிடும்போது X-மாறியின் r-வது விலக்கப் பெருக்குத் தொகை m_rஐ அடைகிறோம்.

விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு ஒரு தனிச் சார்பாக அமையும். அதாவது, இரு ராண்டம் மாறிகளின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்புகள் வேறல்லாது, ஒரு படித்தாக அமையின் அவ்விரு மாறிகளின் பரவல்களும் வேறல்லாது ஒரு படித்தாக அமையும் என்பது விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பின் ஒரு முக்கிய பண்பாகும்.

கணக்கு

ராண்டம் மாறி X-ன் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு, $M_X(t) = e^{t^2/2}$, $-\infty < t < \infty$ என்போம்.

$e^{t^2/2}$ சார்பின் அடுக்குத் தொடர்

$$e^{t^2/2} = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{\left(\frac{t^2}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{t^2}{2}\right)^3}{3!} + \ldots$$

ஆகும். இத்தொடரில் $t, t^3, t^5, \ldots t^{2n-1}, \ldots$ ஆகிய உறுப்புக்களின் கெழுக்கள் ஒவ்வொன்றும் பூச்சியமாகும். எனவே,

$$E(X^{2k-1}) = 0, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

அதாவது, X-மாறியின் ஒற்றைப்படை விலக்கப் பெருக்குத் தொகை பூச்சியமாகும்.

$M_X(t)$-யின் அடுக்குத் தொடரில் $\frac{t^{2k}}{(2k)!}$-யின் கெழு $\frac{(2k)!}{2^k \cdot k!}$ ஆகும். எனவே,

$$m_{2k} = E(X^{2k}) = \frac{2k!}{2^k \cdot k!}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \text{ ஆகும்.}$$

கணக்கு

தனித்த மாறி X-ன் நிகழ்தகவுத் திணிவுப் பரவல்

$p_X(0) = \frac{1}{8}$, $p_X(1) = \frac{3}{8}$, $p_X(3) = \frac{3}{8}$, $p_X(4) = \frac{1}{8}$, $p_X(x) = 0$, மற்றபடி எனில், அதன் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \left[\frac{1}{8} + \frac{3e^t}{8} + \frac{3e^{3t}}{8} + \frac{e^{4t}}{8}\right]$$

ஆகும்.

கணக்கு

ஒரு தொடர்ச்சியான மாறி Y-ன் நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்

$$f_Y(y) = e^{-y}, \quad 0 < y < \infty$$
$$= 0, \quad \text{மற்றபடி}$$

என்போம். Y-ன் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = \int_0^\infty e^{ty} \cdot e^{-y} \cdot dy$$

$$= \frac{1}{(1-t)}, \quad t < 1$$

ஆகும்.

கணக்கு

ஒரு ராண்டம் மாறி ξ-யின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு $M(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$ எனில்,

$$E(\xi) = \left[\frac{d M(t)}{dt}\right]_{t=0} = \left[e^{\lambda(e^t-1)} \lambda e^t\right]_{t=0} = \lambda$$

$$E(\xi^2) = \left[\frac{d^2 M(t)}{dt^2}\right]_{t=0} = \left[e^{\lambda(e^t-1)} (\lambda e^t)^2 + e^{\lambda(e^t-1)} \lambda e^t\right]_{t=0}$$

$$= \lambda^2 + \lambda$$

$$\sigma^2(\xi) = m_2 - m_1^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

ஆகின்றன.

கணக்கு

X-மாறிகள் நிகழ்தகவுத் திணிவுப் பரவல்

$$p_X(x) = \frac{6}{\pi^2 x^2}, \quad x = 1, 2, \ldots\ldots$$
$$= 0, \quad \text{மற்றபடி}$$

என்போம்.

$t > 0$ எனும்போது

$$\sum_{x=1}^{\infty} e^{tx}\, p(x) = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{6 \cdot e^{tx}}{\pi^2 \cdot x^2} = \infty$$

எனவே, X-ன் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு உளதாயில்லை என்கிறோம்.

வரையறை

மாறுபாட்டுக் கெழு (Coefficient of Variation) ராண்டம் மாறி X-ன் மாறுபாட்டுக் கெழுவை

$$V = \frac{\text{திட்ட விலக்கம்}}{\text{கூட்டுச் சராசரி}} \times 100 = \frac{\sigma}{m_1} \times 100$$

என வரையறுக்கிறோம்.

கணக்கு

X-மாறியின் நிகழ்தகவுப் பரவல்,

$$f_X(x) = \begin{cases} 2(1-x), & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{மற்றபடி} \end{cases}$$

எனக் கொள்வோம். அப்போது,

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x) \cdot dx$$
$$= \int_0^1 (x)\, 2(1-x) \cdot dx = \tfrac{1}{3}$$
$$E(x^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, f_X(x) \cdot dx$$
$$= \int_0^1 (x^2)\, 2(1-x) \cdot dx = \tfrac{1}{6}$$

எனவே,

$$\sigma_X^2 = E[x - E(x)]^2 = E(x^2) - [E(x)]^2$$
$$= \tfrac{1}{6} - (\tfrac{1}{3})^2 = \tfrac{1}{18}$$

ஆகவே, X-மாறியின் மாறுபாட்டுக் கெழு,

$$V = \frac{\sigma_X}{E(x)} \times 100 = \frac{1/\sqrt{18}}{1/3} \times 100$$
$$= 71\%$$

இடைநிலை (Median)

'a' ஒரு மெய்யெண் எனக் கொள்வோம். ராண்டம் மாறி Xஆனது

$$P_r[X < a] \leq \tfrac{1}{2}, \quad P_r[X \geq a] \geq \tfrac{1}{2}$$

ஆகிய இரு நிபந்தனைகளுக்குட்பட்டு இருப்பின், மெய்யெண் 'a' ஐ ராண்டம் மாறி X-ன் **இடைநிலை (Median)** என வழங்குகிறோம். ராண்டம் மாறியின் இடைநிலை ஒரு தனி (unique) மதிப்பாகவோ அல்லது பல்வேறு மதிப்புகளாகவோ அமையும்.

தொடர்ச்சியான ராண்டம் மாறி X-ன் இடைநிலை மதிப்பு aஐப் பெற கீழ்க்கண்ட

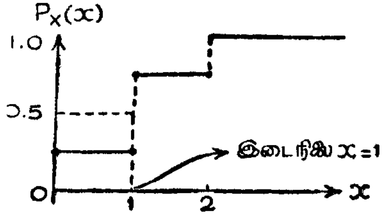
$$F_X(a) = P_r(X \leq a) = \tfrac{1}{2}$$

பரவல் சார்பு சமன்பாட்டைத் தீர்வு செய்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 1.

X-மாறியின் நிகழ்தகவுத் திணிவுப் பரவல்

$$f_X(x) = \tfrac{1}{4}, \quad x = 0$$
$$= \tfrac{1}{2}, \quad x = 1$$
$$= \tfrac{1}{4}, \quad x = 2$$
$$= 0, \quad \text{மற்றபடி}$$



படம் 2.7
நிகழ்தகவுப் பரவல் சார்பு

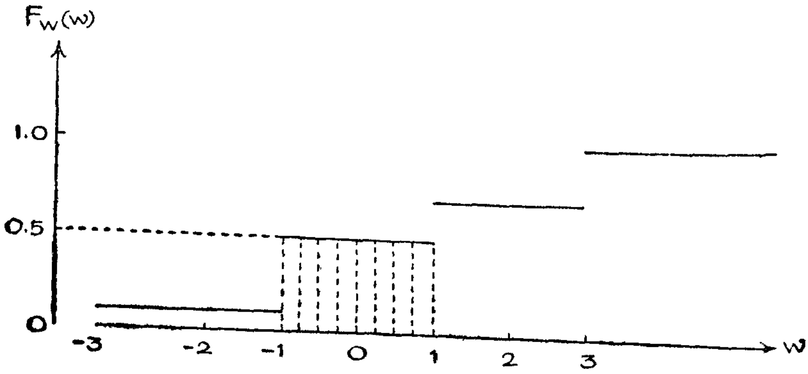
எனில், $P_r[X < 1] = \frac{1}{4}$, $P_r[X \geq 1] = \frac{3}{4}$ ஆக அமைவதால் X-மாறியின் இடைநிலை மதிப்பு 1 எனப் பெறுகிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 2.

W-மாறியின் பரவல்

$$
\begin{aligned}
f_W(w) &= 0{\cdot}1, & w &= -3 \\
&= 0{\cdot}4, & w &= -1 \\
&= 0{\cdot}2, & w &= 1 \\
&= 0{\cdot}3, & w &= 3 \\
&= 0, & & \text{மற்றபடி}
\end{aligned}
$$

என்போம்.



படம் 2.8
நிகழ்தகவுப் பரவல் சார்பு
இடைநிலை $a : a \in (-1, 1)$

கணப்பகுதி $[a : -1 \leq a \leq 1]$-ல் அடங்கியுள்ள ஒவ்வொரு மதிப்பு 'a'-யும்,

$$P_r[X \leq a] = p_r[X \geq a] = \frac{1}{2}$$

ஆகிய நிபந்தனைகளுக்குட்படுகிறது.

எனவே, இடைவெளி $(-1, 1)$-ல் அடங்கியிருக்கும் ஒவ்வொரு மதிப்பும், W-மாறியின் இடைநிலை மதிப்பு என்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 3.

Y-மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்

$$
\begin{aligned}
f_Y(x) &= 2x, & 0 < x < 1 \\
&= 0, & \text{மற்றபடி}
\end{aligned}
$$

என்போம்.

இப்போது,

$$F_Y(a) = P_r[X < a] = \int_0^a 2x \, . \, dx = a^2 \text{ ஆகும்.}$$

Y-மாறியின் இடைநிலை மதிப்பு aஐப் பெற கீழ்க்கண்ட சமன்பாட்டைத் தீர்வு செய்கிறோம்.

$$F_Y(a) = \tfrac{1}{2}$$

இங்கு $F_y(a) = a^2$ ஆக அமைவதால், $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ஆகும்.

எனவே, Y-மாறியின் இடைநிலை மதிப்பு $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ஆகப் பெறுகிறோம்.

சதவீதமானம் (Percentile)

$0 < p < 1$ என அமையும் மெய்யெண் pஐ எடுத்துக் கொள்வோம். மெய்யெண் aஆனது

$$P_r[x < a] \leq p, \quad P_r[x \geq a] \geq p$$

ஆகிய இரு நிபந்தனைகளுக்கு உட்பட்டு அமையின் aஐ ராண்டம் மாறி X-ன் (100 P)-வது **சதவீதமானம்** என வரையறுக்கின்றோம்.

X ஒரு தொடர்ச்சியான ராண்டம் மாறியெனில் அதன் (100 P)-வது சதவீதமானம் aஆனது

$$P_r[X \leq a] = p$$

சமன்பாட்டுக்கு உட்படும்படியான ஒரு தனி மதிப்பு ஆகும்.

கணக்கு

X-மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்

$$f_x(x) = \frac{x}{2}, \qquad 0 < x < 2$$
$$= 0, \qquad \text{மற்றபடி}$$

எனில், இதன் 10%, 25%, 75%, 90% சதவீதமான மதிப்புகளை அடைக.

முறை

X-மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்

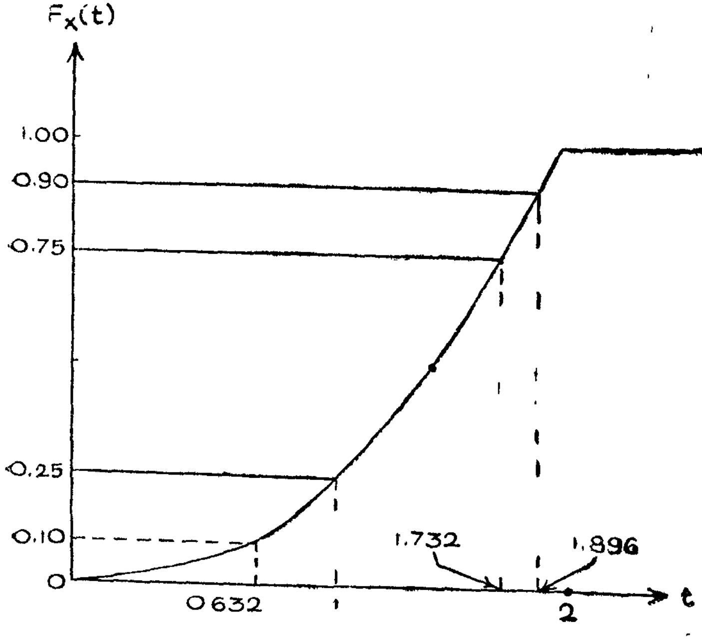
$$f_x(x) = \frac{x}{2}, \qquad 0 < x < 2$$
$$= 0, \quad \text{மற்றபடி எனும்போது,}$$

அதன் பரவல் சார்பு,

$$P_r[X < t] = F_x(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{x}{2}\, dt$$

$$= \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{t^2}{4}, & 0 < t < 2 \\ 1, & t \geq 2 \end{cases}$$

ஆகும்.



படம் 2.9
சதவீதமானம்

X-மாறியின் (100 P)-வது சதவீதமானம் 'a'ஐப் பெற

$$P_r[X < a] = F_x(a) = P$$

எனும் சமன்பாட்டைத் தீர்வு செய்கிறோம்.

(i) $P = 10\% = 0.10$ எனில்,

$$\frac{1}{10} = F_x(a) = \frac{a^2}{4}$$

அதாவது, $a = 0.632$.

எனவே, X-மாறியின் 10-வது சதவீதமானத்தின் மதிப்பு 0·632 என்கிறோம்.

(ii) $P = 25\% = \frac{1}{4}$ எனில்,

$$\frac{1}{4} = F_X(a) = \frac{a^2}{4}$$

அதாவது, $a = 1$ ஆகும்.

எனவே, X-மாறியின் 25-வது சதவீதமானத்தின் மதிப்பு 1 என்கிறோம்.

(iii) $P = 75\% = \frac{3}{4}$ எனில்,

$$\frac{3}{4} = F_X(a) = \frac{a^2}{4}$$

எனவே, $a = \sqrt{3} = 1{\cdot}732$

ஆகவே, X-மாறியின் 75-வது சதவீதமானத்தின் மதிப்பு 1·732 ஆகும்.

(iv) $P = 90\% = \frac{9}{10}$ ஆனல்,

$$\frac{9}{10} = F_X(a) = \frac{a^2}{4}$$

ஆகையால், $a = 1{\cdot}896$

X-மாறியின் 90-வது சதவீதமான மதிப்பு 1·896 ஆகும்.

இருபரிமாண ராண்டம் மாறிகள் (Two Dimensional Random Variables)

இப்பொழுது கூறுவெளியின்மேல் வரையப்படும் இரு பரிமாண ராண்டம் மாறிகள் உருவாக்கும் வெளியைப்பற்றி ஓர் எடுத்துக்காட்டு வாயிலாக விளக்குவோம்.

ஒரு நாணயத்தை மூன்று முறை சுண்டி எறியும் ராண்டம் சோதனையில் உருவாகும் கூறுவெளி Ω-ன் உறுப்புகள் $w_1 = (TTT)$, $w_2 = (TTH)$, $w_3 = (THT)$, $w_4 = (HTT)$, $w_5 = (THH)$, $w_6 = (HTH)$, $w_7 = (HHT)$, $w_8 = (HHH)$ ஆகியன. இங்கு H என்பது 'தலை', T என்பது 'பூ' ஆகிய நிகழ்ச்சிகளைக் குறிக்கின்றன. முதலிருமுறை சுண்டியெறியும்போது ஏற்படும் H-களின் எண்ணிக்கையை ஒவ்வோர் உறுப்புக்கும் இணையான மெய் யெண் என X-சார்பையும், மூன்று முறைகள் சுண்டியெறியும் போது ஏற்படும் H-களின் எண்ணிக்கையை ஒவ்வோர் உறுப்புக்

கும் இணையான மெய்யெண்கள் என Y-சார்பையும் வரையறுப் போம். அப்போது ஒவ்வோர் உறுப்புக்கும் இணையான X, Y மதிப்புக்கள் கீழ்க்கண்டன.

உறுப்பு w	$X(w) = x$	$Y(w) = y$
w_1	0	0
w_2	0	1
w_3	1	1
w_4	1	1
w_5	1	2
w_6	1	2
w_7	2	2
w_8	2	3

X, Y ஆகியன இருபரிமாண ராண்டம் மாறிகளாகும். இவைகள் Ωஐ வரிசைப்படுத்தப்பட்ட சோடி மெய்யெண்கள் வெளி $S = \{(X, Y) : (X, Y) = (0, 0), (0, 1), (1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3)\}$ S-உடன் தொடர்புபடுத்துகின்றன.

S-வெளியானது, இருபரிமாண மெய்யெண்களின் கணப் பகுதியாகும். இதை இருபரிமாண ராண்டம் மாறி (X, Y)-களின் வெளி என்கிறோம்.

வரையறை

ஒரு ராண்டம் சோதனையின் கூறுவெளி Ω என்போம். X, Y எனும் ராண்டம் மாறிகள் Ω-ன் ஒவ்வோர் உறுப்புக்கும் இணை யாக ஒரு வரிசைப்படுத்தப்பட்ட சோடி $[X(w) = x, Y(w) = y]$ மெய்யெண்ணைத் தொடர்புபடுத்துகின்றன என்போம். அப்போது, X, Y ஆகிய மாறிகளின் வெளியானது $S = \{(X, Y) : X(w) = x, Y(w) = y, w \in \Omega\}$ எனும் வரிசைப்படுத்திய சோடி மதிப்புக் களின் கணமாகும். இப்போது Ω-ன் மேல் வரையறை செய்யப் பட்ட நிகழ்தகவு சார்பு $Q(C)$, $C \subset \Omega$ எனக் கொள்வோம். S-ன் பகுதி கணம் A எனில், இதற்கு இணையான C கணத்தை,

$$C = \{ w : w \in \Omega,\ [X(w), Y(w)] \in A \}$$

எடுத்துக்கொள்வோம்.

இப்போது, C கணத்தின் நிகழ்தகவு மதிப்பு $Q(C)$யை A கணத்தின் ஊக்குவிக்கப்பட்ட நிகழ்தகவு மதிப்பு

$$P_r [(X(w), Y(w)) \in A] = Q(C)$$

என வழங்குகிறோம். $P_r [(X(w), Y(w)) \in A]$யை $P_{xy} (A)$ எனக் குறிக்கிறோம்.

இரு பரிமாண ராண்டம் மாறிகள் உருவாக்கும் வெளியை விளக்குமுகத்தான் முன்பு அளித்த எடுத்துக்காட்டில், கூறுவெளி உறுப்புக்கள் ஒவ்வொன்றின் நிகழ்தகவு $\frac{1}{8}$ எனக் கொள்வோம். இப்போது S-ன் உறுப்புகளுக்கு அளிக்கப்படும் நிகழ்தகவு மதிப்புகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு பெறுகிறோம்.

A	C	$P_{XY} (A) = Q(C)$
(0, 0)	w_1	$\frac{1}{8}$
(0, 1)	w_2	$\frac{1}{8}$
(1, 1)	w_3, w_4	$\frac{2}{8}$
(1, 2)	w_5, w_6	$\frac{2}{8}$
(2, 2)	w_7	$\frac{1}{8}$
(2, 3)	w_8	$\frac{1}{8}$

n பரிமாண ராண்டம் மாறிகள் (*n* Dimensional Random Variables)

வரையறை

ஒரு ராண்டம் சோதனையின் கூறுவெளி 'Ω' என்போம். $X_1, X_2, \ldots, X_n$ எனும் 'n' ராண்டம் மாறிகள் Ω-ன் ஒவ்வோர் உறுப்புக்கும் இணையாக ஒரு வரிசைப்படுத்திய n பரிமாண மெய் யெண்கள் புள்ளியுடன்

$$[X_1(w) = x_1,\ X_2(w) = x_2, \ldots\ldots, X_n(w) = x_n]$$

தொடர்புபடுத்தும்படி வரையறை செய்யப்பட்டுள்ளன என்போம். அப்போது $X_1, X_2, \ldots, X_n$ மாறிகளின் வெளி

$$S = \{ (X_1, X_2, \ldots, X_n) : X_i(w), = x_i,\quad i = 1, 2, \ldots, n,\ w \in \Omega \}$$

எனும் கணமாகும். இதை ராண்டம் மாறி $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ களின் n-பரிமாணவெளி என்கிறோம். கூறுவெளி Ωஐ யொட்டி

வரையறை செய்யப்படும் நிகழ்தகவு கணச் சார்பு $Q(C)$, $C \subset \Omega$ என்போம்.

S-ன் பகுதி கணம் A எனில், இதற்கு இணையான C கணத்தை $C = \{ w : [X_1(w), X_2(w), \ldots, X_n(w)] \in A \}$ எடுத்துக் கொள்வோம். இக் கணத்தின் நிகழ்தகவு $Q(C)$ஐ நிகழ்ச்சி A-ன் ஊக்குவிக்கப்பட்ட நிகழ்தகவு

$$P_r\{(X_1(w), X_2(w), \ldots, X_n(w) \in A\} = P_{x_1 x_2 \ldots x_n}(A)$$
$$= Q(C)$$

என அழைக்கிறோம்.

கணக்கு

நன்கு கலக்கப்பட்ட சீட்டுக் கட்டிலிருந்து 2 சீட்டுகள் உருவப்படும் ராண்டம் சோதனையின் ஒவ்வொரு விளைவுக்கான நிகழ்தகவு 1/52 என்க. ஒரு விளைவில் ஏற்படும் 'ஸ்பேட்' சீட்டுகளின் எண்ணிக்கையை X ராண்டம் மாறியும், ஹார்ட் சீட்டுகளின் எண்ணிக்கையை Y ராண்டம் மாறியும் 'கிளப்' சீட்டுகளின் எண்ணிக்கையை Z மாறியும், 'டைமண்ட்' சீட்டுகளின் எண்ணிக்கையை T மாறியும் குறிப்பிடும்படி மாறிகள் வரையறுக்கப்படுகின்றன என்போம்.

இப்போது கூறுவெளியின் ஆதார உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை $\binom{52}{2} = 1326$ ஆகும். ஒவ்வோர் உறுப்பு w க்கும் தொடர்பாக அமையும் வரிசைப்படுத்திய $[X(w) = x, Y(w) = y, Z(w) = z, T(w) = t]$ மெய்யெண் கீழ்க்காணும் 4 பரிமாண வெளிகணத்தில்

$$S = \{(2, 0, 0, 0), (0, 2, 0, 0), (0, 0, 2, 0), (0, 0, 0, 2), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1)\}$$

அடங்கியுள்ளன.

இப்போது, நிகழ்ச்சி $A = (2, 0, 0, 0)$-ன் ஊக்குவிக்கப்படும் நிகழ்தகவு மதிப்பைப் பெறுவோம்.

நிகழ்ச்சி $A = (2, 0, 0, 0)$ ஏற்படுகிறதெனில் சீட்டுக்கட்டிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட இரு சீட்டுகளும் ஸ்பேட் சீட்டுகள் என்பதாகும். இந்நிகழ்ச்சிக்குச் சாதகமான ஆதார நிகழ்ச்சிகள் $\binom{13}{2} = 78$ ஆகும்.

எனவே, $P_{X, Y, Z, T}(A) = P(2, 0, 0, 0) = \frac{78}{1326} = \frac{1}{17}$

இதுபோன்றே,

$$P(0, 2, 0, 0) = P(0, 0, 2, 0) = P(0, 0, 0, 2) = \tfrac{1}{17}$$

இப்போது $A = (1, 1, 0, 0)$ எனும் நிகழ்ச்சி சீட்டுக்கட்டிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட 2 சீட்டுகளில் ஒன்று 'ஸ்பேட்', மற்றது 'ஹார்ட்' எனும் நிகழ்ச்சியைக் குறிக்கின்றது. இந்நிகழ்ச்சிக்குச் சாதகமான ஆதார நிகழ்ச்சிகள் $\binom{13}{1}\binom{13}{1} = 169$ ஆகின்றன. எனவே,

$$P_{X, Y, Z, T}(1, 1, 0, 0) = \tfrac{169}{1326} = \tfrac{13}{102} \text{ ஆகிறது.}$$

இதுபோன்றே,

$$\begin{aligned} P_{XYZT}(1, 0, 1, 0) &= P_{XYZT}(1, 0, 0, 1) \\ = P_{XYZT}(0, 1, 0, 1) &= P_{XYZT}(0, 0, 1, 1) = \tfrac{13}{102} \end{aligned}$$

ஆகின்றன.

இருமாறி பரவல் சார்பு (Bivariate Distribution Function)

X, Y ஆகியன இரு பரிமாண ராண்டம் மாறிகள் எனவும், இரு பரிமாண மெய்யெண்களின் வெளியில் வரையறுக்கப்பட்டுள்ள நிகழ்தகவு கணச்சார்பு $P_{XY}(A)$ எனவும் கொள்வோம்.

இப்போது,

$$A = \{(u, v) : u \leqslant x, v \leqslant y\}$$

எனில்,

$$\begin{aligned} P_{XY}(A) &= Prob((x, y) \in A) \\ &= Prob(X \leqslant x, Y \leqslant y) \end{aligned}$$

ஆகும். இருபரிமாண புள்ளி (x, y)ஐச் சார்ந்துள்ள இக்கோவை யைக் குறியீட்டால் $F_{XY}(x, y)$ எனக் குறிப்பிடுகிறோம்.

புள்ளிச்சார்பு $F_{XY}(x, y) = Prob(X \leqslant x, Y \leqslant y)$ஐ இருமாறி பரவல் சார்பு எனவும், X, Y ஆகிய மாறிகளின் இரு பரிமாண பரவல் சார்பு எனவும் அழைக்கிறோம்.

a, b, c, d எனும் மெய்யெண்கள் $a < b$, $c < d$ ஆகிய நிபந்தனைக்குட்படுகின்றன எனவும்,

$$W = \{(u, v) : a < u \leqslant b, c < v \leqslant d\}$$

எனவும் கொள்வோம்.

இப்போது,

$$\begin{aligned} F_{XY}(b, d) &= Prob(X \leq b, Y \leq d) \\ F_{XY}(a, d) &= Prob(X \leq a, Y \leq d) \end{aligned}$$

ஆக அமைவதால்,

$$F_{XY}(b, d) - F_{XY}(a, d) = Prob\,(X \leq b,\ Y \leq d) - Prob\,(X \leq a,\ Y \leq d)$$
$$= Prob\,(a < X \leq b,\ Y \leq d)$$

இதுபோன்றே,

$$F_{XY}(b, c) - F_{XY}(a, c) = Prob\,(a < X \leq b,\ Y \leq c)$$

ஆதலால்,

$$[F_{XY}(b, d) - F_{XY}(a, d)] - [F_{XY}(b, c) - F_{XY}(a, c)]$$
$$= Prob\,(a < X \leq b,\ Y \leq d) - Prob\,(a < X \leq b,\ Y \leq c)$$
$$= Prob\,(a < X \leq b,\ c < Y \leq d)$$
$$= Prob\,[(x, y) \in W]$$
$$= P_{XY}(W)$$

ஆகும்.

எனவே, $P_{XY}(W) = F_{XY}(b, d) - F_{XY}(a, d) - F_{XY}(b, c) + F_{XY}(a, c)$ ஆக அமைகிறது.

X, Y ஆகிய ராண்டம் மாறிகளின் இரு பரிமாண பரவல் சார்பு $F_{X,Y}(x, y)$ தொடர்ச்சியான சார்பெனில், அம்மாறிகளை இரு பரிமாண தொடர்ச்சி மாறிகள் எனவும், $F_{X,Y}(x, y)$ஐ

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x, y)}{\partial x \cdot \partial y}$$

(X, Y) மாறிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு எனவும் வழங்குகிறோம்.

இரு பரிமாண மெய்யெண்கள் வெளியில் அடங்கியுள்ள ஒரு புள்ளி (x', y') எனவும், dx, dy ஆகியன மிகச் சிறிய மிகை யெண்கள் எனவும் கொள்ளும்போது,

$$Prob\,(x' < X < x' + dx,\ y' < Y < y' + dy) = f_{XY}(x'\,y')\,dx \cdot dy$$

ஆகும்.

X, Y தொடர்ச்சியான ராண்டம் மாறிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f_{XY}(x, y)$ எனில், அவைகளின் இரு பரிமாண பரவல் சார்பு

$$F_{XY}(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{XY}(u, v)\, du \cdot dv$$

X, Y ஆகிய ராண்டம் மாறிகளின் இரு பரிமாண பரவல் சார்பு $F_{XY}(x, y)$ தொடர்ச்சியற்றதாகவும், $F_{XY}(x, \infty)$, $F_{XY}(\infty, y)$ ஆகியன ஒரு மாறி தனித்த சார்புகளாகவும் அமையின், அம்மாறிகளை இரு பரிமாண தனித்த மாறிகள் என அழைக்கிறோம்.

இருமாறி பரவல் சார்பு $F_{XY}(x, y)$ ஆனது (x_i, y_j) $i = 1, 2, \ldots$, $j = 1, 2, \ldots$ ஆகிய புள்ளிகளில் தொடர்ச்சியற்றதெனக் கொள்ளும் போது $(X = x_i, Y = y_j)$-ன் நிகழ்தகவுச் சார்பு $f_{XY}(x_i, y_j)$ ஐ

$$f_{XY}(x_i, y_j) = Prob\,(X = x_i,\ Y = y_j), \quad i = 1, 2, \ldots \quad j = 1, 2, \ldots$$

(X, Y) மாறிகளின் **இணைந்த நிகழ்தகவுத் திணிவுச் சார்பு** என வழங்குகிறோம்.

(X, Y) ஆகிய தனித்த ராண்டம் மாறிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவுத் திணிவுச் சார்பு $F_{XY}(x_i, y_j)$, $i = 1, 2, \ldots, j = 1, 2, \ldots$ எனில், மாறிகளின் இரு பரிமாண பரவல் சார்பு,

$$F_{XY}(x, y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_i \leq y} f_{XY}(x_i, y_j)$$

ஆகும்.

இறுதி நிலைப் பரவல் (Marginal Distribution)

X, Y ஆகிய இரு தொடர்ச்சியான ராண்டம் மாறிகளின் நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல் $f(x, y)$ எனக் கொள்வோம். a, b ஆகிய மெய்யெண்கள் $a < b$ எனும் நிபந்தனைக்குட்பட்டுள்ளன என்போம்.

இப்போது,

நிகழ்ச்சி $(a < X < b)$ = நிகழ்ச்சி $(a < X < b, -\infty < Y < \infty)$ ஆக அமைவதால்,

$$P_r\,(a < X < b) = P_r\,(a < X < b, -\infty < Y < \infty)$$

$$= \int_a^b \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy \cdot dx$$

ஆகும்.

இப்போது, தொகை

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \cdot dy$$

x மாறியின் சார்பாக அமைகிறது. இதை $g(x)$ எனக் குறிப்பிடுவோமானல்,

$$\int_a^b \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \cdot dy \cdot dx = \int_a^b g(x) \cdot dx$$

ஆகும்.

$$\text{ஆதலால்,} \quad P_r(a < X < b) = \int_a^b g(x) \cdot dx \text{ ஆகும்.}$$

இங்கு $g(x)$ ஒரு நிகழ்தகவுப் பரவலாக அமைகிறது. இதை X-மாறியின் இறுதிநிலைப் பரவல் என வழங்குகிறோம்.

X, Y ஆகிய மாறிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல் $f(x, y)$ எனில், X-மாறியின் இறுதிநிலைப் பரவல்

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \cdot dy$$

ஆகும்.

இதுபோன்றே, Y-மாறியின் இறுதிநிலைப் பரவல்

$$h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \cdot dx$$

ஆகும்.

இப்போது X, Y ஆகிய இரு பரிமாண தனித்த ராண்டம் மாறிகளின் நிகழ்தகவுத் திணிவுப் பரவல் $f(x, y)$ எனில், X-மாறியின் இறுதிநிலைப் பரவல்

$$g(x) = \sum_{y < \infty} f(x, y)$$

ஆகவும், Y-மாறியின் இறுதிநிலைப் பரவல்

$$h(y) = \sum_{x < \infty} f(x, y)$$

ஆகவும் அமைகின்றன.

நிபந்தனைப் பரவல் (Conditional Distribution)

X, Y ஆகிய ராண்டம் மாறிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவுப் பரவல் சார்பு $f_{XY}(x, y)$ எனவும், X-மாறியின் இறுதிநிலைப் பரவல்

சார்பு $g(x)$ எனவும், Y-மாறியின் இறுதிநிலைப் பரவல் சார்பு $h(y)$ எனவும் கொள்வோம்.

இரு பரிமாண மெய்யெண்கள் வெளியின் உட்கணங்கள்

$$A = \{ (x, y) : x = x_1, \ -\infty < y < \infty \}$$
$$B = \{ (x, y) : y = y_1, \ -\infty < x < \infty \}$$

எனில்,

$$A \cap B = \{ (x_1, y_1) \}$$

ஆகும்.

இப்போது,
$$P(A) = P_r[(X, Y) \in A] = g(x_1)$$
$$P(B) = P_r[(X, Y) \in B] = h(y_1)$$
$$P(A \cap B) = P_r[(X, Y) \in A \cap B] = f_{XY}(x_1, y_1)$$

ஆகின்றன.

நிகழ்ச்சி Aயை $P(A) > 0$ எனும் நிபந்தனைக்கு உட்படும்படி எடுத்துக் கொள்வோம். நிகழ்ச்சி A கொடுக்கப்படும்போது நிகழ்ச்சி B-ன் நிபந்தனை நிகழ்தகவு,

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{f_{XY}(x_1, y_1)}{g(x_1)}$$

ஆகும். இது நிகழ்ச்சி $(X = x_1)$ கொடுக்கப்படும்போது நிகழ்ச்சி $Y = y_1$-ன் நிபந்தனை நிகழ்தகவாகும்.

x ஒரு நிலையெண்ணாகவும், $g(x) > 0$ ஆக அமைவதாகவும் கொள்வோம். $(X = x)$ கொடுக்கப்படும்போது, Y-மாறியின் நிபந்தனை நிகழ்தகவுப் பரவல்,

$$f_{Y/X}(y/x) = \frac{f_{XY}(x, y)}{g(x)}$$

என வரையறை செய்கிறோம்.

இதுபோன்றே, y ஒரு நிலையெண்ணாகவும், $h(y) > 0$ ஆக அமைவதாகவும் கொள்வோம். $(Y = y)$ கொடுக்கப்படும்போது X-மாறியின் நிபந்தனை நிகழ்தகவுப் பரவல்,

$$f_{X/Y}(x/y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{h(y)}$$

என வரையறை செய்கிறோம்.

$(X = x)$ கொடுக்கப்படும்போது, Y-மாறியின்

(i) நிபந்தனை எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு

$$E(Y/x) = \int y f_{y/x}(y/x) \cdot dy, \quad X, Y \text{ தொடர்ச்சியான மாறிகள் எனில்}$$

$$= \sum_{y} y f_{y/x}(y/x), \quad X, Y \text{ தனித்த மாறிகள் எனில்}$$

ஆகவும்,

(ii) நிபந்தனை மாறுபாடு

$$E\{[Y - E(y/x)]^2/x\}$$
$$= E(Y^2/x) - [E(y/x)]^2$$

ஆகவும் அமைகின்றன.

எடுத்துக்காட்டு

X, Y ஆகிய தொடர்ச்சியான மாறிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்

$$f_{XY}(x, y) = 2, \quad 0 < X < y < 1$$
$$= 0, \quad \text{மற்றபடி}$$

எனக் கொள்வோம்.

X–மாறியின் இறுதிநிலைப் பரவல்

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) \cdot dy$$

$$= \int_{x}^{1} 2 \cdot dy$$

$$= \begin{cases} 2(1-x), & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{மற்றபடி} \end{cases}$$

ஆகும்.

Y-மாறியின் இறுதிநிலைப் பரவல்,

$$h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) \cdot dx$$

$$= \int_{0}^{y} 2 \cdot dx$$

$$= \begin{cases} 2y, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{மற்றபடி} \end{cases}$$

ஆகும்.

$(Y = y)$ கொடுக்கப்படும்போது, X-மாறியின் நிபந்தனை நிகழ்தகவுப் பரவல்,

$$f_{x/y}(x/y) = \frac{f_{xy}(x, y)}{h(y)}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{y}, & 0 < x < y, \quad 0 < y < 1 \\ 0, & \text{மற்றபடி} \end{cases}$$

ஆகும்.

$(Y = y)$ கொடுக்கப்படும்போது, X-மாறியின்

(i) நிபந்தனை கூட்டுச் சராசரி,

$$E(x/y) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{x/y}(x/y) \cdot dx$$

$$= \int_{0}^{y} x \cdot \left(\frac{1}{y}\right) \cdot dx$$

$$= y/2, \quad 0 < y < 1$$

ஆகவும்,

(ii) நிபந்தனை மாறுபாடு

$$E\left[(x - E(x/y)^2)/y\right] = E(x^2/y) - \left[E(x/y)\right]^2$$

$$= \int_{\infty}^{y} x^2 \cdot \left(\frac{1}{y}\right) dx - \left(\frac{y}{2}\right)^2$$

$$= \frac{y^2}{12}, \quad 0 < y < 1$$

ஆகவும் அமைகின்றன.

$(X = x)$ கொடுக்கப்படும்போது, Y-மாறியின் நிபந்தனை நிகழ்தகவுப் பரவல்,

$$f_{y/x}\ (y/x) = \frac{f_{xy}\ (x, y)}{g\ (x)}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x < y < 1,\ 0 < x < 1 \\ 0, & \text{மற்றபடி} \end{cases}$$

ஆகும்.

$(X = x)$ கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்போது, Y-மாறியின்

(i) நிபந்தனை கூட்டுச் சராசரி,

$$E\,(y/x) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_{y/x}\,(y/x) \cdot dy$$

$$= \int_{x}^{1} y \cdot \left(\frac{1}{1-x}\right) dy$$

$$= \frac{1-x}{2}, \qquad 0 < x < 1$$

ஆகவும்,

(ii) நிபந்தனை மாறுபாடு,

$$E\,[\,(\,Y - E\,(y/x)\,)^2/y\,] = E\,(y^2/x) - [\,E\,(y/x)\,]^2$$

$$= \int_{x}^{1} y^2 \left(\frac{1}{1-x}\right) dy - \left(\frac{1-x}{2}\right)^2$$

$$= \frac{(1-x)^2}{12}, \quad 0 < x < 1$$

ஆகவும் அமைகின்றன.

கணக்கு

X, Y ஆகிய தனித்த ராண்டம் மாறிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவுத் திணிவுப் பரவல்,

$$F_{xy}(x,y) = \frac{(x+2y)}{18}, \quad (x,y) = (1,1),\ (1,2), (2,1),\ (2,2)$$
$$= \quad 0 \quad , \text{ மற்றபடி}$$

எனக் கொள்வோம்.

X-மாறியின் இறுதிநிலைப் பரவல்

$$g(x) = \sum_y f_{xy}(x,y) = \begin{cases} f_{xy}(x,1) + f_{xy}(x,2), & x = 1, 2 \\ 0, & \text{மற்றபடி} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{x+3}{9}, & x = 1, 2 \\ 0, & \text{மற்றபடி} \end{cases}$$

ஆகும்.

Y-மாறியின் இறுதிநிலைப் பரவல்,

$$h(y) = \sum_x f_{xy}(x,y) = \begin{cases} f_{xy}(1,y) + f_{xy}(2,y), & y = 1, 2 \\ 0, & \text{மற்றபடி} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{3+4y}{18}, & y = 1, 2 \\ 0, & \text{மற்றபடி} \end{cases}$$

$(Y = y)$ கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்போது X-மாறியின் நிபந்தனை நிகழ்தகவுப் பரவல்,

$$f_{xy}(x/y) = \frac{f_{xy}(x,y)}{h(y)}$$

$$= \frac{x+2y}{18} \cdot \frac{18}{3+4y}$$

$$= \begin{cases} \frac{x+2y}{3+4y}, & x = 1, 2 \\ 0, & \text{மற்றபடி} \end{cases}$$

$$Y = 1 \text{ எனில், } f_{x/y}(x/y=1) = \begin{cases} \frac{x+2}{7}, & x = 1, 2 \\ 0, & \text{மற்றபடி} \end{cases}$$

$$Y = 2 \text{ எனில், } f_{x/y}(x/y=2) = \begin{cases} \frac{x+4}{11}, & x = 1, 2 \\ 0. & \text{மற்றபடி} \end{cases}$$

$(Y = y)$ கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்போது, X-மாறியின் நிபந்தனை கூட்டுச் சராசரி,

$$E(x/y) = \sum_{x} x \cdot f_{x/y}(x/y)$$

$$= 1 \cdot \left(\frac{1+2y}{3+4y}\right) + 2 \cdot \left(\frac{2+2y}{3+4y}\right)$$

$$= \frac{6y+5}{4y+3}$$

ஆகும்.

$$E(x/y=1) = \tfrac{11}{7} = 1\tfrac{4}{7}$$
$$E(x/y=2) = \tfrac{17}{11} = 1\tfrac{6}{11}$$

இப்போது, $E(x^2/y) = \sum x^2 f_{x/y}(x/y)$

$$= 1^2 \cdot \left(\frac{1+2y}{3+4y}\right) + 2^2 \cdot \left(\frac{2+2y}{3+4y}\right)$$

$$= I \frac{(1+y)}{(3+4y)}, \qquad y = 1, 2$$

ஆகும்.

எனவே, $(Y = y)$ கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்போது X-மாறியின் நிபந்தனை மாறுபாடு

$$E[(X - E(x/y))^2/y] = E(x^2/y) - [E(x/y)]^2$$

$$= \frac{I(1+y)}{(3+4y)} - \left(\frac{5+6y}{3+4y}\right)^2$$

$$= \frac{2+3y}{(3+4y)^2}, \qquad y - 1, 2$$

ஒட்டுறவுக் கெழு (Correlation Coefficient)

X, Y ஆகிய இரு ராண்டம் மாறிகளின் நிகழ்தகவுப் பரவல் $f(x, y)$ எனவும், X-மாறியின் சராசரி, மாறுபாடு முறையே μ_x, σ_x^2 எனவும், Y-மாறியின் சராசரி, மாறுபாடு முறையே μ_y, σ_y^2 எனவும் கொள்வோம்.

இப்போது, X, Y மாறிகளின் ஒட்டுறவுக் கெழு ρ_{XY}ஐ

$$\rho_{XY} = \frac{E[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)]}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

என வரையறுக்கிறோம்.

$E[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)]$ஐ (X, Y) மாறிகளின் இணைமாறுபாடு (Covariance) என வழங்குகிறோம்.

$$\begin{aligned} E[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)] &= E[XY - X\mu_y - Y\mu_x + \mu_x\mu_y] \\ &= E(XY) - E(X)\mu_y - E(Y)\mu_x + \mu_x\mu_y \\ &= E(XY) - \mu_x\mu_y \end{aligned}$$

கணக்கு

X, Y மாறிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x + y, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \\ &= 0, \quad \text{மற்றபடி} \end{aligned}$$

எனக் கொள்வோம்.

$$\mu_x = E(X) = \int_0^1 \int_0^1 [x \cdot f(x, y)] dx \cdot dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 x \cdot (x+y) dx \cdot dy = \frac{7}{12}$$

$$\sigma_x^2 = EX^2 - [E(X)]^2$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 x^2 \cdot (x+y)\, dx.\, dy - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{11}{144}$$

இது போன்றே $\mu_y = E(Y) = \frac{7}{12}$, $\sigma_y^2 = \frac{11}{144}$ ஆக அமைகின்றன.

X, Y மாறிகளின் இணைமாறுபாடு,

$$E(XY) - E(X) \cdot E(Y) = \int_0^1 \int_0^1 xy(x+y) dx \cdot dy - \left(\frac{7}{12}\right)^2$$

$$= -\frac{1}{144}$$

எனவே (X, Y) மாறிகளின் ஒட்டுறவுக்கெழு

$$\rho_{xy} = \frac{E((X-\mu_x)(Y-\mu_y))}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{-\frac{1}{144}}{\sqrt{\left(\frac{11}{144}\right)\left(\frac{11}{144}\right)}} = -\frac{1}{11}$$

ஆகும்.

சார்பிலா ராண்டம் மாறிகள் (Independent Random Variables)

X, Y ஆகிய இரு மாறிகளின் நிகழ்தகவுப் பரவல் $f(x, y)$ எனவும், X-மாறியின் இறுதிநிலை நிகழ்தகவுப் பரவல் $g(x)$ எனவும், Y-மாறியின் இறுதிநிலை நிகழ்தகவுப் பரவல் $h(y)$ எனவும் கொள்ளும்போது (x, y)-ன் எல்லா சோடி மதிப்புகளுக்கும்,

$$f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$$

என அமையின், X, Y ஆகியன சார்பிலா ராண்டம் மாறிகள் என வரையறை செய்கிறோம்.

(x, y)-ன் ஏதேனும் ஒரு சோடி மதிப்புகளுக்கு

$$f(x, y) \neq g(x) \cdot h(y)$$

எனில், X, Y ஆகியன சார்புடைய ராண்டம் மாறிகள் என வரையறை செய்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 1.

X, Y மாறிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவுத் திணிவுச் சார்பு

$f(1, 1) = 5/36$, $f(1, 2) = \frac{5}{18}$, $f(2, 1) = 1/9$

$f(2, 2) = 2/9$, $f(3, 1) = \frac{1}{12}$, $f(3, 2) = 1/6$

$f(x, y) = 0$, மற்றபடி என்போம்.

இப்போது X-மாறியின் இறுதிநிலைப் பரவல் சார்பு

$$g(1) = f(1, 1) + f(1, 2) = \tfrac{5}{12}$$
$$g(2) = f(2, 1) + f(2, 2) = \tfrac{1}{3}$$
$$g(3) = f(3, 1) + f(3, 2) = \tfrac{1}{4}$$

$g(x) = 0$, மற்றபடி ஆகும்.

Y-மாறியின் இறுதிநிலைச் சார்பு,

$$h(1) = f(1, 1) + f(2, 1) + f(3, 1) = \tfrac{1}{3}$$
$$h(2) = f(1, 2) + f(2, 2) + f(3, 2) = \tfrac{2}{3}$$

$h(y) = 0$, மற்றபடி ஆகும்.

இப்போது,

$$
\begin{aligned}
f(1,1) &= \tfrac{5}{36} = \tfrac{5}{12} \times \tfrac{1}{3} = g(1)\cdot h(1)\\
f(1,2) &= \tfrac{5}{18} = \tfrac{5}{12} \times \tfrac{2}{3} = g(1)\cdot h(2)\\
f(2,1) &= \tfrac{1}{9} = \tfrac{1}{3} \times \tfrac{1}{3} = g(2)\cdot h(1)\\
f(2,2) &= \tfrac{2}{9} = \tfrac{1}{3} \times \tfrac{2}{3} = g(2)\cdot h(2)\\
f(3,1) &= \tfrac{1}{12} = \tfrac{1}{4} \times \tfrac{1}{3} = g(3)\cdot h(1)\\
f(3,2) &= \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{4} \times \tfrac{2}{3} = g(3)\cdot h(2)\\
f(x,y) &= 0 = g(x)\cdot h(y),
\end{aligned}
$$

$$(x, y) \notin \{ (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2) \}$$

ஆகின்றன. எனவே, X, Y மாறிகள் சார்பிலா மாறிகளாக அமைகின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 2.

U, V ஆகிய இரு மாறிகளின் நிகழ்தகவுத் திணிவுப் பரவல்

$U \backslash V$	-2	-1	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0
1	0	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	0

என்போம்.

U-மாறியின் இறுதிநிலைப் பரவல், $g(0) = \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$g(1) = \frac{3}{10}+\frac{1}{5} = \frac{1}{2}$

$g(x) = 0$, மற்றபடி

V-மாறியின் இறுதிநிலைப் பரவல், $h(-2) = \frac{1}{4}$

$h(-1) = \frac{3}{10}$

$h(1) = \frac{9}{20}$

$h(y) = 0$, மற்றபடி

இப்போது, $g(0)\cdot h(-2) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ ஆகும்.

ஆனல், $f(0,-2) = \frac{1}{4}$ ஆக அமைவதால்,

$$f(0,-2) \neq g(0)\cdot h(-2)$$

எனவே, U, V மாறிகள் சார்புடையன என்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 3.

X, Y மாறிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்,

$$f(x,y) = 4x(1-y), \quad 0 < x < 1, \; 0 < y < 1$$
$$= 0, \quad \text{மற்றபடி}$$

என்போம்.

X-மாறியின் இறுதிநிலை அடர்த்திப் பரவல்

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy = 4x \int_0^1 (1-y)\, dy$$

$$= \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{மற்றபடி} \end{cases}$$

Y-மாறியின் இறுதிநிலை அடர்த்திப் பரவல்

$$h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx$$

$$= 4(1-y) \int_0^1 x\, dx$$

$$= 2(1-y), \quad 0 < y < 1$$
$$= 0, \quad \text{மற்றபடி}$$

இப்போது, $g(x) \cdot h(y) = 2x \cdot 2(1-y)$

$$= 4x(1-y), \; 0 < x < 1, 0 < y < 1$$
$$= 0, \quad \text{மற்றபடி}$$
$$= f(x,y) \quad \text{ஆகும்.}$$

எனவே, X, Y மாறிகள் சார்பிலா மாறிகளாகின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 4.

U, V மாறிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்

$$f(u,v) = u+v, \quad 0 < u < 1, \; 0 < v < 1$$
$$= 0, \quad \text{மற்றபடி}$$

என்போம்.

U-மாறியின் இறுதிநிலை அடர்த்திப் பரவல்

$$g(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v)\, dv = \int_{0}^{1} (u+v)\, dv = (u+\tfrac{1}{2}), \quad 0 < u < 1$$

$$= 0, \quad \text{மற்றபடி}$$

V-மாறியின் இறுதிநிலை அடர்த்திப் பரவல்

$$h(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v)\, du = \int_{0}^{1} (u+v)\, du = (v+\tfrac{1}{2}), \quad 0 < v < 1$$

$$= 0, \quad \text{மற்றபடி}$$

இப்போது, $g(u) \cdot h(v) = (u+\frac{1}{2})(v+\frac{1}{2}) \qquad 0 < u < 1, \; 0 < v < 1$

$$\neq f(u, v), \qquad 0 < u < 1, \; 0 < v < 1$$

எனவே U, V ஆகியன சார்புடைய மாறிகளாக அமைகின்றன.

இரு மாறிகளின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு (Moment Generating Function for two Variables)

X, Y ஆகிய இரு மாறிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவுப் பரவல் $f(x, y)$ என்போம். h_1, h_2 ஆகியன இரு மிகை மெய்யெண்கள் எனவும், t_1, t_2 ஆகியவைகள் $-h_1 < t_1 < h_1$, $-h_2 < t_2 < h_2$ எனவும் அமையும்போது, சார்பு $e^{t_1 x_1 + t_2 x_2}$-ன் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு உளதாயின் அதை X, Y மாறிகளின் இணைந்த **விலக்கப்** பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பு என அழைக்கிறோம்.

இதை $M(t_1, t_2)$ எனக் குறியீட்டால் குறிப்போம்.

X, Y ஆகியன தொடர்ச்சியான மாறிகள் எனில்,

$$M(t_1\, t_2) = E\left[e^{t_1 x + t_2 y}\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{t_1 x + t_2 y} f(x, y)\, dx \cdot dy$$

ஆகும்.

X, Y ஆகியன தனித்த மாறிகள் எனில்,

$$M(t_1\, t_2) = \sum_x \sum_y e^{t_1 x + t_2 y} f(x, y)$$

ஆகும்.

விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பு $M(t_1, t_2)$ ஐ t_1ஐக் குறித்து k முறைகள், t_2ஐக் குறித்து m முறைகள் வகைப் படுத்திப் பெறும் கோவையில் t_1, t_2 ஆகியவைகளுக்குப் பூச்சிய மதிப்பைப் பிரதியிடும் போது சார்பு $(x^k\, y^m)$-ன் எதிர் பார்க்கும் மதிப்பைப் பெறுகிறோம்.

X, Y ஆகியன தொடர்ச்சியான மாறிகள் எனில்,

$$\left[\frac{\partial^{k+m} M(t_1\, t_2)}{\partial\, t_1^{\,k}\, \partial\, t_2^{\,m}}\right]_{t_1=0=t_2} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^k y^m f(x, y)\, dx \cdot dy$$

$$= E(x^k y^m)$$

X, Y தனித்த மாறிகள் ஆனல்

$$\left[\frac{\partial^{k+m} M(t_1\, t_2)}{\partial\, t_1^{\,k}\, \partial\, t_2^{\,m}}\right]_{t_1=0=t_2} - \sum_x \sum_y x^k y^m f(x, y)$$

ஆகின்றன.

இப்போது,

$$M(t_1, 0) = E\left(e^{t_1 x}\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{t_1 x} f(x, y)\, dx \cdot dy,$$

X, Y தொடர்ச்சியான மாறிகள் எனில்

$$= \sum_x \sum_y e^{t_1 x} f(x, y),$$

X, Y தனித்த மாறிகள் எனில்

ஆகும். X-மாறியின் இறுதிநிலைப் பரவலை $g(x)$ எனக் குறிப்பிடும் போது,

$$M(t_1, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{t_1 x} g(x) \cdot dx,$$

X, Y தொடர்ச்சியான மாறிகளெனில்

$$= \Sigma\ e^{t_1 x}\ g(x), \qquad X, Y \text{ தனித்த மாறிகளெனில்}$$

ஆகும்.

எனவே, $M(t_1, 0)$ஐ *X*-மாறியின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு என்கிறோம்.

இது போன்றே $M(0, t_2)$ஐ *Y*-மாறியின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு என்கிறோம்.

கணக்கு

X, Y மாறிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்

$$f(x, y) = e^{-y}, \qquad 0 < x < y < \infty$$
$$= 0\ , \qquad \text{மற்றபடி}$$

என்போம்.

மாறிகளின் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பு

$$M(t_1, t_2) = E\left[e^{t_1 x + t_2 y}\right]$$

$$= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{t_1 x + t_2 y - y} \cdot dy \cdot dx$$

$$= \frac{1}{(1-t_1-t_2)(1-t_2)}, \qquad t_1 + t_2 < 1,\ t_2 < 1$$

$$E(X) = \left[\frac{\partial\ M(t_1, t_2)}{\partial t_1}\right]_{t_1=0=t_2} = 1$$

$$E(Y) = \left[\frac{\partial M(t_1, t_2)}{\partial t_2}\right]_{t_2=0=t_2} = 2$$

$$E(X, Y) = \left[\frac{\partial^2\ M(t_1, t_2)}{\partial t_1\ \partial t_2}\right]_{t_1=0=t_2} = 3$$

$$E(X^2) = \left[\frac{\partial^2\ M(t_1, t_2)}{\partial t_1^2}\right]_{t_1=0=t_2} = 2$$

$$E(Y^2) = \left[\frac{\partial^2\ M(t_1, t_2)}{\partial t_2^2}\right]_{t_1=0=t_2} = 46$$

எனவே,

$$\sigma_x^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = 1$$

$$\sigma_y^2 = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 2$$

X, Y மாறிகளின் ஒட்டுறவுக் கெழு

$$\rho_{xy} = \frac{E[(X - E(X))(Y - E(Y))]}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ஆகின்றன.

தேற்றம்

X, Y ஆகியன சார்பிலா ராண்டம் மாறிகள் எனவும், X-ன் இறுதிநிலைப் பரவல் $g(x)$ எனவும், Y-ன் இறுதிநிலைப் பரவல் $h(y)$ எனவும் கொள்வோம்.

X-ன் சார்பு $\phi(x)$, Y-ன் சார்பு $\psi(y)$ ஆகியவைகளின் பெருக்குத் தொகையின் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு, $\phi(x)$-ன் எதிர் பார்க்கும் மதிப்பு, $\psi(y)$-ன் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு ஆகியவைகளின் பெருக்குத் தொகை ஆகும்.

அதாவது, $E[\phi(x) \cdot \psi(y)] = E[\phi(x)] \cdot E[\psi(y)]$ ஆகும்.

தெரிப்பு

$$E[\phi(x) \cdot \psi(y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \cdot \psi(y) \cdot f(x, y) \cdot dx \cdot dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \cdot \psi(y) \cdot g(x) \cdot h(y) \cdot dx \cdot dy$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \cdot g(x)\, dx \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} \psi(y) \cdot h(y)\, dy \right]$$

$$= E[\phi(x)] \cdot E[\psi(y)].$$

தேற்றம்

X, Y ஆகியவைகள் தொடர்ச்சியான ராண்டம் மாறிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல் $f(x, y)$ எனவும், அவை

களின் இறுதிநிலைப் பரவல்கள் முறையே $g(x)$, $h(y)$ எனவும் கொள்வோம். மேலும் (X, Y) மாறிகளின் இணைந்த விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பு $M(t_1, t_2)$ எனவும், X-மாறியின் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பு $M(t_1, 0)$ எனவும், Y-மாறியின் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பு $M(0, t_2)$ எனவும் கொள்வோம்.

(i) X, Y மாறிகள் சார்பிலா மாறிகள் எனில்,

$$M(t_1, t_2) = M(t_1, 0) \cdot M(0, t_2)$$

ஆகும்.

(ii) மறுதலையாக,

$$M(t_1, t_2) = M(t_1, 0) \cdot M(0, t_2) \text{ எனில்,}$$

X, Y மாறிகள் சார்பிலா மாறிகளாக அமைகின்றன.

தெரிப்பு

(i) X, Y ஆகியவைகள் சார்பிலா மாறிகள் எனில்,

$$\begin{aligned} M(t_1, t_2) &= E\left(e^{t_1 x + t_2 y}\right) \\ &= E\left(e^{t_1 x} \cdot e^{t_2 y}\right) \\ &= E\left(e^{t_1 x}\right) E\left(e^{t_2 y}\right) \\ &= M(t_1, 0) \cdot M(0, t_2) \end{aligned}$$

ஆகும்.

(ii) இப்போது,

$$M(t_1, 0)\, M(0, t_2) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{t_1 x}\; g(x)\, dx\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{t_2 y}\; h(y)\, dy\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{t_1 x + t_2 y}\; g(x) \cdot h(y) \cdot dx \cdot dy$$

ஆகும்.

X, Y மாறிகளின் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பு

$$M(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{t_1 x + t_2 y} f(x, y) \cdot dx \cdot dy$$

ஆகும்.

$$M(t_1, t_2) = M(t_1, 0) \cdot M(0, t_2)$$

எனக் கொடுக்கப்பட்டிருப்பதால்,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{t_1 x + t_2 y} f(x, y) \cdot dx \cdot dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{t_1 x + t_2 y} g(x) \cdot h(y) \cdot dx \cdot dy$$

ஆக அமைகிறது. இப்போது விலக்கப் பெருக்குத்தொகை ஒரு வாக்கும் சார்பு ஒரு தனிச் சார்பாக அமையும் பண்பின் வாயிலாக, $f(x, y)$, $[g(x) \cdot h(y)]$ ஆகியன வேறுபடாத ஒரே பரவல் சார்பாக அமைகின்றன எனப் பெறுகிறோம்.

ஆகவே, $f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$

அதாவது, X, Y மாறிகள் சார்பிலா மாறிகளாகின்றன எனப் பெறுகிறோம்.

η பரிமாண மாறிகளின் பரவல் சார்பு

வெக்டர் $(a_1\ a_2 \ldots a_n)$ஐக் குறியீட்டால் $\underline{a}$ எனக் குறிப்பிடுவோம். $X_1, X_2, \ldots, X\eta$ ஆகியன η-பரிமாண ராண்டம்மாறிகள் எனவும், η பரிமாண மெய்யெண்களின் வெளியில் வரையறை செய்யப்படும் நிகழ்தகவு கணச்சார்பு $P_X(A)$ எனவும் கொள்வோம்.

இப்போது, $A = \{ (t_1, t_2, \ldots, t_n) : t_1 \leq x_1, t_2 \leq x_2, \ldots, t_n \leq x_n \}$ எனில்,

$$P_{\underline{X}}(A) = Prob\,(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \ldots, X_n \leq x_n)$$

ஆகும்.

η பரிமாண வெளியில் அடங்கியுள்ள புள்ளி $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ஐச் சார்ந்துள்ள இக்கோவையை $F_{\underline{X}}(\underline{x})$ எனக் குறியீட்டால் குறிப்பிடுகிறோம்.

புள்ளிச்சார்பு $F_{\underline{X}}(\underline{x}) = Prob\,(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2 \ldots, X_n \leq x_n)$ஐ η மாறி பரவல் சார்பு எனவும், $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ ஆகிய ராண்டம் மாறிகளின் η-பரிமாண பரவல் சார்பு எனவும் அழைக்கிறோம்.

வெக்டர் $(X_1, X_2, ..., X_n)$ ராண்டம் மாறியின் η பரிமாண பரவல் சார்பு $F_{\underline{x}}(\underline{x})$ தொடர்ச்சியான சார்பெனில், அம்மாறிகளை η பரிமாண தொடர்ச்சி மாறிகள் எனவும், $f_{\underline{x}}(\underline{x})$ஐ

$$f_{\underline{x}}(\underline{x}) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \cdot \partial x_2 \dots \partial x_n} F_{\underline{x}}(\underline{x})$$

$(X_1, X_2, ..., X_n)$ மாறிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு எனவும் வழங்குகிறோம்.

η பரிமாண மெய்யெண்கள் வெளியில் அடங்கியுள்ள ஒரு புள்ளி $\underline{x}^1 = (x^1_1, x^1_2, ..., x^1_n)$ எனவும், $dx_1, dx_2, ..., dx_n$ ஆகியன மிகச் சிறிய மிகையெண்கள் எனவும் கொள்ளும்போது,

$$Prob\ (x_1^1 < x_1 < x_1^1 + dx_1,\ x_2^1 < x_2 < x_2^1 + dx_2, ...,$$
$$x_n^1 < x_n < x_n^1 + dx_n$$
$$= f_{\underline{x}}(\bar{x}^1)\, dx_1 \cdot dx_2 \dots dx_n$$

ஆகும்.

தொடர்ச்சியான வெக்டர் $(x_1, x_2, \dots x_n)$ மாறிகள் இணைந்த நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f_{\underline{x}}(\underline{x})$ எனில், அவைகளின் η பரிமாண பரவல் சார்பு,

$$F_{\underline{x}}(\underline{x}) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\dots\int_{-\infty}^{x_n} f_{\underline{x}}(\underline{x}) \cdot dx_1 \dots dx_n$$

ஆகும்.

$(X_1, X_2, ..., X_n)$ ஆகிய n தொடர்ச்சியான ராண்டம் மாறிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல் $f_{\underline{x}}(\underline{x})$ எனில்,

X_i மாறியின் இறுதிநிலைப் பரவல்

$$g_i(x_i) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_{(n-1)\ \text{முறைகள்}} f_{\underline{x}}(x_1 \cdot x_2 \dots x_n)\, dx_1 \cdot dx_2 \dots$$
$$dx_{i-1} \cdot dx_{i+1} \dots dx_n \quad i = 1, 2, ..., n$$

என வழங்குகிறோம்.

$(X_i = x_i)$ கொடுக்கப்படும்போது $(X_1, X_2, ..., X_{i-1}, X_{i+1} \dots X_n)$ ஆகிய $(n-1)$ மாறிகளின் **நிபந்தனை இணைந்த நிகழ்தகவுப் பரவல்**

$$f_{x_1 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_n / x_i}(x_1 \dots x_{i-1}\, x_{i+1} \dots x_n \,/\, x_i) = \frac{f_{\underline{x}}(\underline{x})}{g_i(x_i)}, \qquad i = 1, 2, ..., n$$

ஆகும்.

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ ஆகிய n மாறிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவுப் பரவல் $f_{\underline{x}}(\underline{x})$ எனவும், $g_1(x_1), g_2(x_2), \ldots, g_n(x_n)$ ஆகியன முறையே $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ஆகிய மாறிகளின் இறுதிநிலைப் பரவல்கள் எனவும் கொள்ளும்போது, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$-ன் எல்லா n-மதிப்புகளுக்கும்,

$$f_{\underline{x}}(x_1, x_2, \ldots x_n) = g_1(x_1) \cdot g_2(x_2) \ldots g_n(x_n)$$

என அமையின், $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ ஆகியன **சார்பிலா ராண்டம் மாறிகள்** என வரையறை செய்கிறோம்.

$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$-ன் ஏதேனுமொரு n-மதிப்புகளுக்கு

$$f_{\underline{x}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq g_1(x_1) \cdot g_2(x_2) \ldots g_n(x_n)$$

எனில், $(X_1\ X_2, \ldots X_n)$ ஆகியன **சார்புடைய ராண்டம் மாறிகள்** என வரையறை செய்கிறோம்.

η பரிமாண மாறிகளின் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பு (Moment Generating Function for 'η' dimensional random variables)

வெக்டர் $\underline{x} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ மாறிகளின் 'η' பரிமாணபரவல் $f_{\underline{x}}(\underline{x})$ என்போம். $h_1, h_2, \ldots, h_n$ ஆகியன η மிகையெண்களெனவும், $t_1, t_2, \ldots, t_n$ ஆகியன $-h_1 < t_1 < h_1, -h_2 < t_2 < h_2, \ldots, h_n < t_n < h_n$ எனவும் அமையும்போது,

சார்பு $e^{t_1 x_1 + t_2 x_2 + \ldots + t_n x_n}$ -ன் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு உளதாயின், இதை வெக்டர் $\underline{x}$-மாறிகளின் இணைந்த விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பு என அழைக்கிறோம். இதை $M(t_1\ t_2 \ldots t_n)$ எனக் குறிப்போம்.

வெக்டர் $\underline{x}$ மாறிகள் தொடர்ச்சியான மாறிகள் எனில்,

$$M(t_1, t_2, \ldots, t_n) = E[e^{t_1 x_1 + t_2 x_2 + \ldots + t_n x_n}]$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}}_{n \text{ முறைகள்}} f_{\underline{x}}(\underline{x})\, dx_1 \ldots dx_n$$

ஆகும்.

η வெக்டர் மாறிகள் தனித்த மாறிகளெனில்,

$$M(t_1\, t_2 \ldots t_n) = E\,[e^{t_1 x_1 + t_2 x_2 + \ldots + t_n x_n}$$

$$= \sum_{x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n} e^{t_1 x_1 + t_2 x_2 \ldots + t_n x_n} f_{\underline{x}}\,(\underline{x})$$

ஆகும்.

இப்போது,

$$M(t_1, 0, 0, \ldots, 0) = E\; e^{(t_1 x_1)}$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty}}_{n \text{ முறைகள்}} e^{t_1 x_1} f_{\underline{x}}\,(\underline{x}) \cdot dx_1 \ldots dx_n$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{t_1 x_1} \cdot g_1(x_1) \cdot dx_1$$

ஆக அமைவதால், $M(t_1, 0, \ldots, 0)$ஐ X_1 மாறியின் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பு என்கிறோம். (இங்கு $g_1(x_1)$ ஆனது X_1-ன் இறுதிநிலைப் பரவல்). இதுபோன்றே $M(0, t_2, 0, \ldots, 0) \ldots M(0, 0, 0, \ldots, t_n)$ ஆகியவைகளை முறையே X_2, X_i, X_n ஆகிய மாறிகள் ஒவ்வொன்றின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு என்கிறோம். மேலும், $M(0, \ldots, t_i, 0, t_j, 0, \ldots, 0)$ஐ (X_i, X_j) ஆகிய இரு மாறிகளின் இணைந்த விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பு என்கிறோம்.

வெக்டர் $\underline{X}$ மாறிகள் சார்பற்றனவெனில்,

$$M(t_1, t_2, \ldots, t_n) = M(t_1, 0, 0, \ldots, 0)\, M(0, t_2, \ldots, 0) \ldots M(0, 0, \ldots, t_n)$$

ஆக அமைகிறது. மறுதலையாக, மேலேயுள்ள சமன்பாடு உண்மையாயின், வெக்டர் $\underline{X}$ மாறிகள் சார்பற்றனவாக அமைகின்றன.

3. சில திட்டமான நிகழ்தகவுப் பரவல்கள்

(Some Standard Probability Distribution)

ஒரு புள்ளிப் பரவல் (One Point Distribution)

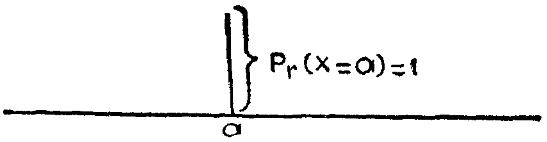
ஒரு ராண்டம் மாறி X_1 மெய்யெண் a ஐ ஏற்றுக் கொள்வதற்கான நிகழ்தகவு 1,

$$P_r (X = a) = 1$$

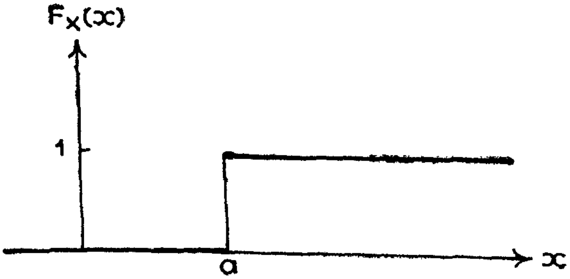
எனில், X- மாறியின் நிகழ்தகவுப் பரவலை ஒரு புள்ளிப் பரவல் என அழைக்கிறோம். இப் பரவலில் நிகழ்தகவுத் திணிவு முழுவதும் ஒரே ஒரு புள்ளியில் அமைகிறது.

X- மாறியின் பரவல் சார்பு

$$F_X(x) = 0, \qquad x < a$$
$$= 1, \qquad x \geq a$$



படம் 3.1 (i)
ஒருபுள்ளி நிகழ்தகவுத் திணிவுப் பரவல்



படம் 3-1 (ii)
ஒரு புள்ளி நிகழ்தகவுப் பரவல் சார்பு

X-மாறியின் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பு

$$M(t) = E(e^{tX}) = \sum_x e^{tX} = e^{ta} \text{ ஆகும்.}$$

X-மாறியின் K-வது விலக்கப் பெருக்குத்தொகை

$$m_k = E(X^k) = \text{சார்பு } M(t)\text{-ன் படித்தொடர் விரிப்பில் } \frac{t^k}{k_!}\text{-ன் கெழு}$$

$$= a^k \qquad k = 0, 1, 2, \ldots\ldots$$

எனப் பெறுகிறோம்.

இப்போது X-மாறியின் கூட்டுச் சராசரி

$$m_1 = E(X) = a$$

ஆகவும், அதன் மாறுபாடு,

$$\sigma_X^2 = E(X-m_1)^2 = m_2 - m_1^2 = a^2 - a^2 = 0$$

ஆகவும் அமைகின்றன.

ஆகவே ராண்டம் மாறியின் நிகழ்தகவுப் பரவல் ஒரு புள்ளிப் பரவலாக அமையின், அதன் மாறுபாடு பூச்சியமாகும் எனப் பெறுகிறோம்.

மறுதலையாக, ஒரு ராண்டம் மாறியின் மாறுபாடு பூச்சியமெனில், அதன் நிகழ்தகவுப் பரவல் ஒரு புள்ளிப் பரவலாகும் என்பதைக் கீழே காண்போம்.

X- மாறியின் மாறுபாடு பூச்சியம்

$$E(X-m_1)^2 = 0$$

எனக் கொள்வோம்.

கோவை $(x-m_1)^2$ ஆனது, பூச்சியம் அல்லது பூச்சியத்திற்குக் கூடுதலான மதிப்பையே பெறுமாதலால்

$$P_r[(X-m_1) = 0] = 1$$

என அமையும்போதுதான் $(X-m_1)^2$-ன் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு பூச்சியமாக அமையும்.

எனவே, $P_r(X = m_1) = P_r(X = a) = 1$ ஆகும்.

அதாவது, X-மாறியின் நிகழ்தகவுப் பரவல் ஒரு புள்ளிப் பரவலாகும்.

இரு புள்ளிப் பரவல் (Two-Point Distribution)

ஒரு ராண்டம் மாறி X, a, b என்ற இரு மெய்யெண் மதிப்புகளை ஏற்றுக் கொள்வதற்கான நிகழ்தகவுகள் கீழ்க்கண்டவாறு

$$P_r(X = a) = 1 - p$$

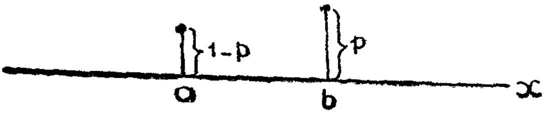
$$P_r(X = b) = p \qquad 0 < p < 1$$

அமையுமெனின், அதன் பரவலை இரு புள்ளிப் பரவல் என அழைக்கிறோம்.

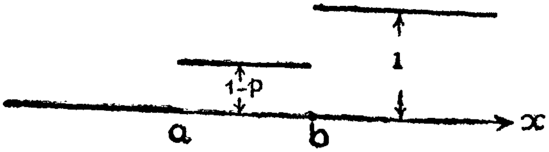
X-மாறியின் பரவல் சார்பு

$$F_x(x) = 0, \qquad X < a$$
$$= 1 - p, \qquad a \leq X < b$$
$$= 1, \qquad X \geq b$$

ஆகும்.



படம் 3.2 (i)
இரு புள்ளி நிகழ்தகவுத் திணிவுப் பரவல்



படம் 3.2 (ii)
இரு புள்ளி நிகழ்தகவுப் பரவல் சார்பு

இரு புள்ளிப் பரவலின் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பு

$$M(t) = E(e^{tx}) = [(1-p)e^{ta} + pe^{tb}]$$

ஆகும்.

X-ன் K-வது விலக்கப் பெருக்குத் தொகை

$$m_k = E(X^k) = (1-p)a^k + p\,b^k \qquad k = 1, 2, \ldots$$

ஆக அமைகிறது.

இப்போது $a = 0, b = 1$ எனக் கொள்ளும்போது

$$m_k = p , \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

ஆகும்.

$$X\text{-ன் மாறுபாடு}, \sigma_X^2 = m_2 - m_1^2$$
$$= p(1-p)$$

இரு புள்ளி ராண்டம் மாறி X-ன் நிகழ்தகவுத் திணிவுப் பரவல்

$$f_X(x) = \begin{cases} 1-p, & x \quad 0 \\ p, & x = 1 \\ 0, & \text{மற்றபடி} \end{cases}$$

எனில், அதன்

(i) கூட்டுச் சராசரி $= E(X) = p$

(ii) மாறுபாடு $= \sigma_X^2 = p(1-p)$

ஆக அமைகின்றன.

$X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ ஆகிய n சார்பற்ற ராண்டம் மாறிகள் கீழ்க் கண்ட முழுதொத்த இரு புள்ளிப் பரவலை

$$f(x) = 1-p, \qquad x = 0$$
$$= p, \qquad x = 1$$
$$= 0, \qquad \text{மற்றபடி}$$

கொண்டு அமையின், Y-மாறியின்

$$Y = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n$$

நிகழ்தகவுத் திணிவுப் பரவல் $g_Y(y)$

$$g_Y(y) = \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y} \qquad y = 0, 1, 2, \ldots, n$$
$$= 0, \qquad \text{மற்றபடி}$$

எனும் ஈருறுப்புப் பரவலாக அமைகிறது என்பதைப் பின்வரும் அத்தியாயத்தில் காண்போம்.

ஈருறுப்புப் பரவல் (Binomial Ditribution)

'n' ஒரு மிகை முழு எண் எனவும், மெய்யெண் p ஆனது இடைவெளி (0, 1)-ல் அமைந்துள்ளது எனவும் கொள்வோம்.

ஒரு தனித்த ராண்டம் மாறி X-ன் நிகழ்தகவுப் பரவல்

$$P_r(X = x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, & x = 0, 1, 2, \ldots, n \\ 0, & \text{மற்றபடி} \end{cases}$$

எனில், இப்பரவலை ஈருறுப்புப் பரவல் எனவும், X-மாறியை n, p ஆகியவைகளைச் சுட்டுறுப்புகளாகக் கொண்ட ஈருறுப்பு மாறி எனவும் அழைக்கிறோம்.

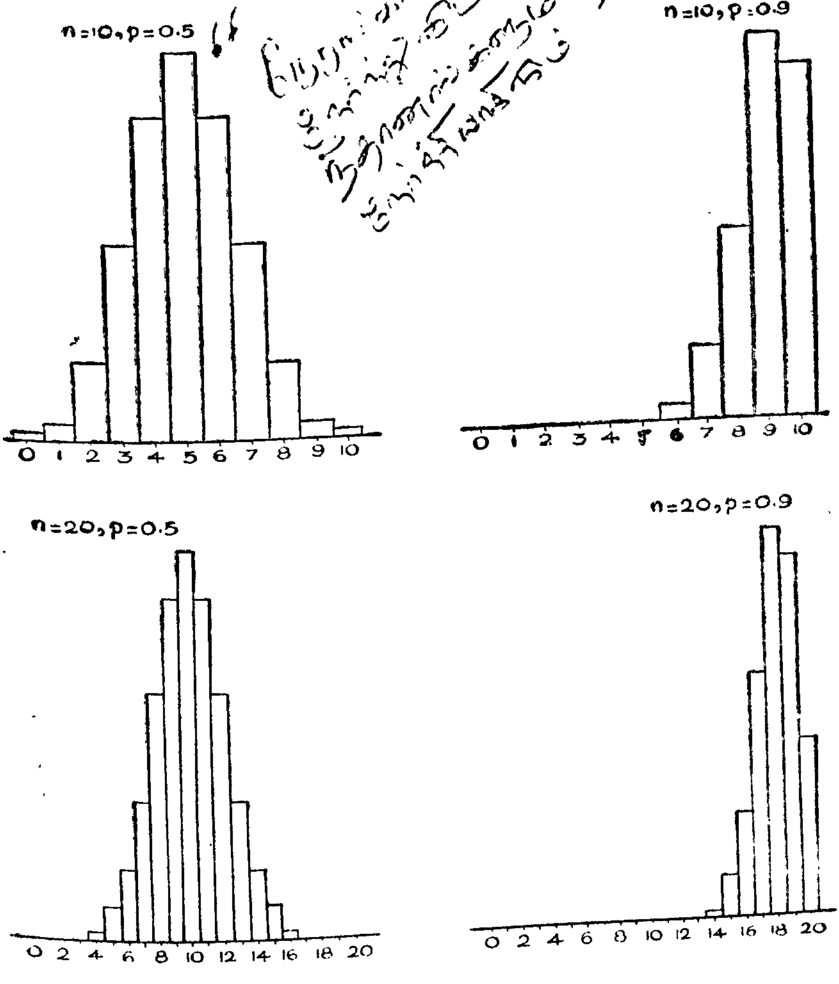
ஒரு ராண்டம் சோதனையின் விளைவு ஒன்றையொன்று விலக்கும் இரு நிகழ்ச்சிகள் ஏதேனுமொன்று எனக் கொள்வோம். எடுத்துக்காட்டுகளாக நாணயத்தைச் சுண்டியெறியும்சோதனையின் விளைவு 'தலை' அல்லது 'பூ' ஆகிய இரு ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளில் ஏதேனுமொன்ருகும். இயந்திரம் உற்பத்தி செய்யும் ஒரு திருகாணியைச் சோதனை செய்யும்போது அது பழுதற்றது அல்லது பழுதுடையது ஆகிய இரு வகைகளில் ஒன்ருகும். இவ்வாருன சோதனைகளில் குறிப்பிட்ட ஒரு நிகழ்ச்சி நிகழ்வதை 'வெற்றி' எனவும், அது நிகழாமல் மற்ற நிகழ்ச்சி நிகழ்வதைத் 'தோல்வி' எனவும் குறிப்பிடுவோம். சோதனையை n முறைகள் சார்பற்றனவாகவும், முழுதொத்தனவாகவும், திரும்பத் திரும்ப மேற்கொள்வதெனவும், ஒவ்வொரு முறையிலும் 'வெற்றி' ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவு p எனவும், தோல்வி ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவு $q = 1 - p$ எனவும் கொள்வோம்.

'n' முயற்சிகளில் ஏற்படும் மொத்த வெற்றிகளின் எண்ணிக்கையை X எனக் குறிப்பிடுவோம். அப்போது, X-ன் மதிப்பு $0, 1, 2, \ldots, n$ ஆகிய $(n+1)$ முழுஎண் மதிப்புகளில் ஏதேனும் ஒன்ருகும். $(X = x)$ என்பது, சோதனையை 'n' முறைகள் மேற்கொள்ளும்போது ஏற்படும் வெற்றிகளின் எண்ணிக்கை x; தோல்விகளின் எண்ணிக்கை $(n-x)$ எனும் இணைந்த நிகழ்ச்சியைக் குறிக்கும். இவ்விணைந்த நிகழ்ச்சிகளுக்குச் சாதகமாக அமையும் ஆதார நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை $\binom{n}{x}$ ஆகும். ஒவ்வோர் ஆதாரமான நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு $p^x\ q^{n-x}$ ஆக அமைவதால், நிகழ்ச்சி $(X = x)$ன் நிகழ்தகவு,

$$P_r\,(X = x) = \binom{n}{x} p^x \cdot q^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$
$$= 0, \quad \text{மற்றபடி}$$

ஆகும்.

எனவே, X-மாறி n, p ஆகியவைகளைச் சுட்டுறுப்புகளாகக் கொண்ட ஈருறுப்பு மாறியாகும்.



படம் 3.3

ஈருறுப்புப் பரவல்கள்

கணக்கு

ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டியெறியும் சோதனையில் 'தலை' மேற்புறமாகத் தோன்றும் நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு 1/2 எனவும், சோதனையை 5 சார்பற்ற முழுதொத்த முறைகள் செய்யப்படுகின்றதெனவும் கொள்வோம். அப்போது, 'தலை' ஏற்படும் நிகழ்ச்சி

களின் எண்ணிக்கைக்கான நிகழ்தகவுத் திணிவுப் பரவல் $n = 5$, $p = \frac{1}{2}$ ஆகிய சுட்டுறுப்புகளைக் கொண்ட ஈருறுப்புப் பரவலாகும்.

'தலை'களின் எண்ணிக்கை	நிகழ்தகவு
0	$(\frac{1}{2})^5 = 1/32$
1	$\binom{5}{1}(\frac{1}{2})^5 = 5/32$
2	$\binom{5}{2}(\frac{1}{2})^5 = 10/32$
3	$\binom{5}{3}(\frac{1}{2})^5 = 10/32$
4	$\binom{5}{4}(\frac{1}{2})^5 = 5/32$
5	$(\frac{1}{2})^5 = 1/32$

கணக்கு

ஒரு நிறுவனம் உற்பத்தி செய்யும் மின்விளக்கு 1000 மணிகளுக்குக் கூடுதலாக எரியும் நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு 1/4 என்போம். இப்போது 6 மின் விளக்குகளை ஆய்வு செய்வோமெனில், 1000 மணிகளுக்குக் கூடுதலாக எரியும் விளக்குகளின் எண்ணிக்கை $n = 6$, $p = \frac{1}{4}$ ஆகியவைகளைச் சுட்டுறுப்புகளாகக் கொண்ட ஈருறுப்புப் பரவலாக அமைகிறது.

1000 மணிகளுக்குக் கூடுதலாக எரியும் மின்விளக்குகளின் எண்ணிக்கை	நிகழ்தகவு
0	$\binom{6}{0}(\frac{1}{4})^0(3/4)^6 = 723/4096$
1	$\binom{6}{1}(\frac{1}{4})^1(3/4)^5 = 1458/4096$
2	$\binom{6}{2}(\frac{1}{4})^2(3/4)^4 = 1215/4096$
3	$\binom{6}{3}(\frac{1}{4})^3(3/4)^3 = 540/4096$
4	$\binom{6}{4}(\frac{1}{4})^4(3/4)^2 = 135/4096$
5	$\binom{6}{5}(\frac{1}{4})^5(3/4)^1 = 18/4096$
6	$\binom{6}{6}(\frac{1}{4})^6(3/4)^0 = 1/4096$

X-மாறியின் பரவல் n, p ஆகியவைகளைச் சுட்டுறுப்புகளாகக் கொண்ட ஈருறுப்புப் பரவல் என்போம். X-ன் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பு

$$M(t) = E\left(e^{tx}\right) = \sum_x e^{tx} f(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (pe^t)^x q^{n-x}$$

$$= (q + pe^t)^n$$

ஆகும். இச்சார்பு t-ன் எல்லா மெய்யெண் மதிப்புகளுக்கும் உளதாயிருக்கிறது.

இவ் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பின் வாயிலாக X-மாறியின் முதல் நான்கு விலக்கப் பெருக்குத்தொகைகளைப் பெறுகிறோம்.

$$m_1 = E(X) = \left[\frac{d}{dt} M(t)\right]_{t=0}$$

$$= np$$

$$m_2 = E(X^2) = \left[\frac{d^2}{dt^2} M(t)\right]_{t=0}$$

$$= npq + n^2 p^2$$

$$m_3 = E(X^3) = \left[\frac{d^3}{dt^3} M(t)\right]_{t=0}$$

$$= n(n-1)(n-2)p^3 + 3n(n-1)p^2 + np$$

$$m_4 = E(X^4) = \left[\frac{d^4}{dt^4} M(t)\right]_{t=0}$$

$$= n(n-1)(n-2)(n-3)p^4 + 6n(n-1)(n-2)p^3 + 7n(n-1)p^2 + np$$

இப்போது X-ன் கூட்டுச் சராசரி மாறுபாடு மூன்றாவது நடுவிலக்கப் பெருக்குத்தொகை, நான்காவது நடு விலக்கப் பெருக்குத்தொகை, பீட்டா கெழுக்கள் ஆகியவைகளைப் பெறுகிறோம்.

$$E(X) = m_1 = np$$

$$\sigma_X^2 = m_2 - m_1^2 = npq$$

$$\mu_3 = m_3 - 3m_2 m_1 + 2m_1^3 = npq(q-p)$$

$$\mu_4 = m_4 - 3m_3 m_1 + 3m_2 m_1^2 - 2m_1^3$$

$$= 3n^2 p^2 q^2 + npq(1-6pq)$$

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = \frac{(q-p)^2}{npq}$$

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = 3 + \frac{1-6pq}{npq}$$

இப்போது n, p ஆகியவைகளைச் சுட்டுறுப்புகளாகக் கொண்ட ஈருறுப்பு மாறியின் r-வது நடு விலக்கப் பெருக்குத்தொகை

$$\mu_r = \sum_{x=0}^{n} (x-np)^r \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

ஆகும். இக்கோவையில் pயைக் குறித்து வகைகாணும்போது

$$\frac{d\mu_r}{dp} = \sum_{x=0}^{n} \left\{ -nr\,(x-np)^{r-1} \binom{n}{x} (1-p)^{n-x} + (x-np)^r \binom{n}{x} xp^{x-1} (1-p)^{n-x} - (x-np)^r \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x-1} (n-x) \right\}$$

$$= nr\,\mu_{r-1} + \frac{1}{pq}\mu_{r+1}$$

அதாவது,

$$\mu_{r+1} = pq\left[nr\,\mu_{r-1} + \frac{d\mu_r}{dp} \right]$$

ஆகும். இது ஈருறுப்பு ராண்டம் மாறியின் $(r+1)$-வது, r-வது, $(r-1)$-வது நடுவிலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளைத் தொடர்புற அமைக்கும் சமன்பாடாகும்.

குறை ஈருறுப்புப் பரவல் (Negative Binomial Distribution)

n ஒரு மிகை முழு எண் எனவும், மெய்யெண் p ஆனது $0 < p < 1$ எனும் நிபந்தனைக்குட்படுகிறது எனவும் கொள்வோம். ஒரு தனித்த ராண்டம் மாறி X-ன் நிகழ்தகவுத் திணிவுப் பரவல்

$$f_X(x) = \binom{x-1}{n-1} p^n (1-p)^{x-n}, \quad x = n, n+1, \ldots$$
$$= 0, \quad \text{மற்றபடி}$$

எனில், X-மாறியை n, p ஆகியவைகளைச் சுட்டுறுப்புகளாகக் கொண்ட குறை ஈருறுப்பு மாறி எனவும், அதன் பரவலைக் குறை ஈருறுப்புப் பரவல் எனவும் அழைக்கிறோம்.

இப்போது,

$$\sum_{x=n}^{\infty} f_x(x) = p^n + \binom{n}{n-1} p^n (1-p) + \binom{n+1}{n-1} p^n (1-p)^2 + \ldots$$

$$= p^n \left[1 + \binom{n}{1}(1-p) + \binom{n+1}{2}(1-p)^2 + \ldots \right]$$

$$= p^n [1-(1-p)]^{-n}$$

$$= 1.$$

n ஒரு நிலையான மிகை முழு எண் எனவும், ஒரு ராண்டம் சோதனையின் விளைவு 'வெற்றி' அல்லது 'தோல்வி' ஆகிய இரு நிகழ்ச்சிகளில் ஏதேனுமொன்று எனவும், வெற்றி ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவு p எனவும், மொத்தம் n வெற்றிகள் ஏற்படும் வரை சோதனையைச் சார்பற்றதாகவும், முழுநொத்தனவாகவும் அமையும்படி திரும்பத் திரும்பச் செய்யப்படுகின்றதெனவும் கொள்வோம். இப்போது மொத்தம் n வெற்றிகள் ஏற்படும்வரை திரும்பத் திரும்ப மேற்கொள்ளும் சோதனைகளின் எண்ணிக்கையை X-மாறி கொண்டு குறிப்பிடும்போது, அது n, p ஆகியவைகளைச் சுட்டுறுப்புகளாகக் கொண்ட குறை ஈருறுப்பு மாறியாக அமைகிறது.

மொத்தம் n வெற்றிகள் ஏற்படும்வரை சோதனையைத் திரும்பத் திரும்ப மேற்கொள்ளுவோமெனில் மொத்த சோதனைகளின் எண்ணிக்கை n அல்லது $(n+1)$ அல்லது $(n+2)$ அல்லது ...... ஆக அமைகிறது. ஆகவே, x மாறி n, $n+1$, $n+2$, ... ஆகிய மிகை முழு எண் மதிப்புகளில் ஏதேனுமொன்றை ஏற்றுக்கொள்ளுமாறு அமைகிறது.

ஒரு மிகை முழு எண் xஐ $x \geq n$ எனும் நிபந்தனைக்குட்படும்படி எடுத்துக்கொள்வோம். ராண்டம் சோதனையை x முறைகள் திரும்பத் திரும்பச் செய்யும்போது xஆவது முறையில் மொத்தம் n வெற்றிகள் ஏற்படும் நிகழ்ச்சியானது சோதனையை முதல் $(x-1)$ முறைகள் திரும்பத் திரும்பச் செய்யும்போது $(n-1)$ வெற்றிகளும், xஆவது முறையில் ஒரு வெற்றியும் ஏற்படும் இணைந்த நிகழ்ச்சியைக் குறிக்கும்.

முதல் $(x-1)$ முறைகள் $(n-1)$ வெற்றிகள் ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவு

$$\binom{x-1}{n-1} p^{n-1} (1-p)^{x-n}$$

ஆகவும், xஆவது முறையில் வெற்றி ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவு p ஆகவும் அமைவதால்,

$$P_n(X = x) = \binom{x-1}{n-1} p^n (1-p)^{x-n}, \quad x=n,\ n+1, \ldots$$
$$= 0, \quad \text{மற்றபடி}$$

எனப் பெறுகிறோம்.

கணக்கு

பூச்சிக் கொல்லி மருந்து தெளிக்கப்படும்போது ஒரு பூச்சியின் மேல் மருந்து விழுவதற்கான நிகழ்தகவு 0·8 எனவும், இரு முறைகள் பூச்சியின் மேல் மருந்து விழுமெனில் அது இறந்துபோகு மென்றும் கொள்வோம். ஒரு குறிப்பிட்ட பூச்சி X-வது முறை மருந்து தெளிக்கப்படும்போது இறந்துபோகிறதெனில், X-மாறியின் பரவல் $n = 2$, $p = 0{\cdot}8$ ஆகியவைகளைச் சுட்டுறுப்பு களாகக் கொண்ட குறை ஈருறுப்புப் பரவலாகும். ஒரு முறை மருந்து தெளிக்கப்படும்போது அது குறிப்பிட்ட பூச்சியின்மேல் விழுவதற்கான நிகழ்தகவு 0·8 ஆகும். இரு முறைகள் மருந்து தெளிக்கப் படும்போது குறிப்பிட்ட பூச்சி இறந்துபோகிற தெனில், மருந்து இருமுறைகளில் அப்பூச்சியின் மேல் விழுந் துள்ளது என்பதாகும். இந்நிகழ்ச்சி ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவு

$$P_n(X = 2) = (0{\cdot}8)^2 = 0{\cdot}64$$

ஆகும்.

மூன்று முறைகள் மருந்து தெளிக்கப்படும்போது குறிப்பிட்ட பூச்சி இறந்துபோகிறதெனில், முதலிரு முறைகளில் ஒரு முறை மருந்து அப்பூச்சியின் மேல் விழுந்து, பிறகு மூன்றுவது முறையில் மருந்து பூச்சியின் மேல் விழுந்துள்ளது என்பதாகும். இந்நிகழ்ச்சி ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவு

$$P_n(X = 3) = \binom{2}{1} (0{\cdot}8)^2 (0{\cdot}2) = 0{\cdot}256$$

ஆகும்.

நான்கு முறைகள் மருந்து தெளிக்கப்படும்போது குறிப்பிட்ட பூச்சி இறந்துபோகிறதெனில், முதல் மூன்று முறைகளில் ஒரு முறை மட்டும் மருந்து அப்பூச்சியின் மேல் விழுந்து, பிறகு நான் காவது முறையில் மருந்து பூச்சியின் மேல் விழுந்துள்ளது என்ப தாகும். இந்நிகழ்ச்சி ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவு

$$P_n(X = 4) = \binom{3}{1} (0{\cdot}8)^2 (0{\cdot}2)^2 = 0{\cdot}0768$$

இதுபோன்றே, ஐந்து முறைகள் மருந்து தெளிக்கப்படும்போது குறிப்பிட்ட பூச்சி இறந்துபோவதற்கான நிகழ்தகவு

$$P_n(X = 5) = \binom{4}{1}(0{\cdot}8)^2(0{\cdot}2)^3 = 0{\cdot}0205$$

ஆகும்.

இப்போது,

$$\begin{aligned} P_n(X \geq 6) &= 1 - [P_n(X=2) + P_n(X=3) \\ &\quad + P_n(X=4) + P_n(X=5)] \\ &= 1 - [0{\cdot}64 + 0{\cdot}256 + 0{\cdot}0768 + 0{\cdot}0205] \\ &= 1 - 0{\cdot}9933 \\ &= 0{\cdot}0067 \end{aligned}$$

ஆகும்.

X-மாறியின் நிகழ்தகவுத் திணிவுப் பரவல் கீழ்க்கண்டவாறு அமைகிறது.

X	நிகழ்தகவு
2	0·6400
3	0·2560
4	0·0768
5	0·0205
≥ 6	0·0067

n, p ஆகியவைகளைச் சுட்டுறுப்புகளாகக் கொண்ட குறை ஈருறுப்புப் பரவலின் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பை இப்போது பெறுவோம்.

n, p ஆகியவைகளைச் சுட்டுறுப்புகளாகக் கொண்ட குறை ஈருறுப்பு மாறி X எனில், அதன் நிகழ்தகவுத் திணிவுப் பரவல்

$$f_X(x) = \binom{x-1}{n-1} p^n (1-p)^{x-n}, \quad x = n, (n+1), \ldots$$

$$= 0, \quad \text{மற்றபடி}$$

ஆகும்.

இதன் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பு

$$M(t) = E(xe^{tx}) = \sum_{x=n}^{\infty} e^{tx} \binom{x-1}{n-1} p^n (1-p)^{x-n}$$

$$= (pe^t)^n \left\{ 1 + \binom{n}{n-1}(1-p)e^t + \binom{n+1}{n-1}\left[(1-p)e^t\right]^2 + \dots \right\}$$

$$= \left[\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right]^n, \quad -\infty < t < \infty$$

ஆகும்.

இப்போது, $m_1 = \left[\frac{d\,M(t)}{dt}\right]_{t=0} = \frac{n}{p}$

$$m_2 = \left[\frac{d^2\,M(t)}{dt}\right]_{t=0} = \frac{n(n+1-p)}{p^2}$$

எனவே, X-மாறியின் கூட்டுச் சராசரி $= E(x) = n/p$

மாறுபாடு $= m_2 - m_1^2 = \frac{n(1-p)}{p^2}$

ஆக அமைகின்றன.

தேற்றம்

Y மாறி n, p ஆகியவைகளைச் சுட்டுறுப்புகளாகக் கொண்ட குறை ஈருறுப்பு மாறி எனில், $X = (Y-n)$ மாறியின் நிகழ்தகவுத் திணிவுச் சார்பு

$$g_X(x) = \binom{x+n-1}{n-1} p^n (1-p)^x, \; x = 0, 1, 2, \dots$$

$$= 0, \quad \text{மற்றபடி}$$

தெரிப்பு

n, p ஆகியவைகளைச் சுட்டுறுப்புகளாகக் கொண்ட குறை ஈருறுப்பு மாறி Y-ன் நிகழ்தகவுத் திணிவுப் பரவல்

$$f_Y(y) = \binom{y-1}{n-1} p^n (1-p)^{y-n}, \quad y = n, n+1, n+2, \dots$$

$$= 0, \quad \text{மற்றபடி}$$

ஆகும்.

இப்போது, $X = (Y-n)$ எனில், X-மாறியின் நிகழ்தகவுத் திணிவுப் பரவல்

$$g_x(x) = P_r\,(X = x)$$
$$= P_r\,(y-n = x)$$
$$= P_r\,(y = x+n)$$
$$= f_y\,(x+n)$$
$$= \binom{x+n-1}{n-1} p^n (1-p)^x, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$
$$= 0, \qquad \text{மற்றபடி}$$

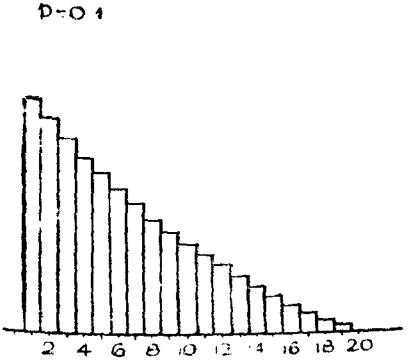
ஆகும்.

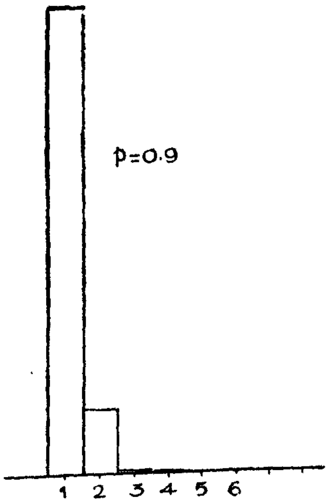
பெருக்கற் பரவல் (Geometric Distribution)

p ஆனது $0 < p < 1$ எனும் நிபந்தனைக்குட்படும் மெய்யெண் எனக் கொள்வோம். ராண்டம் மாறி X-ன் நிகழ்தகவுத் திணிவுச் சார்பு

$$f_x(x) = p\,(1-p)^{x-1}, \qquad x = 1, 2, 3, \ldots\ldots$$
$$= 0\ , \qquad \text{மற்றபடி}$$

எனில், x-மாறியை p யைச் சுட்டுறுப்பாகக் கொண்ட பெருக்கல் ராண்டம் மாறி எனவும், அதன் பரவலைப் பெருக்கற் பரவல் என்றும் அழைக்கிறோம். சுட்டுறுப்புக்கள் n, p ஆகியவைகளைக் கொண்ட குறை ஈருறுப்புப் பரவலில் $n = 1$ எனக் கொள்ளும் போது பெருக்கல் பரவலை அடைகிறோம்.





படம் 3.4
பெருக்கற் பரவல்கள்

கணக்கு

ஒரு நிறுவனம் அது விற்பனை செய்யும் மிட்டாய்ப் பெட்டிகளில் 10 சதவீதப் பெட்டிகள் ஒவ்வொன்றிலும் ஒரு பரிசுச் சீட்டை அடைத்துள்ளது எனக் கொள்வோம். இந்தப் பெட்டிகளை வாங்கும் ஒரு நபர் x-வது பெட்டியை வாங்கும்போது அதில் ஒரு பரிசுச் சீட்டைப் பெறுகிறார் எனில், பரிசுச் சீட்டைப் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவுப் பரவல் சுட்டுறுப்பு $p = \frac{1}{10}$ மதிப்பைக்கொண்ட பெருக்கற் பரவலாகும்.

மிட்டாய் விற்கும் நிறுவனம் பத்து பெட்டிகளுக்கு ஒருபெட்டி வீதம் பரிசுச்சீட்டை மிட்டாயுடன் அடைத்து விற்பனைசெய்வதால், அது விற்பனை செய்யும் பெட்டிகளில் சம வாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் ஒரு பெட்டியினுள் பரிசுச்சீட்டு இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $p = \frac{1}{10}$ ஆகும்.

நிறுவனம் விற்பனை செய்யும் பெட்டிகளில் x-வது பெட்டியை வாங்கும்போது அதனுள் ஒரு பரிசுச்சீட்டைப் பெறுகிறோம் எனில், ஒன்று முதல், $(x-1)$-வது பெட்டிகளில் பரிசுச்சீட்டு இருக்கவில்லை என்பதாகிறது. எனவே, x பெட்டிகளை வாங்கும்பொழுது, x-வது பெட்டியில் பரிசுச்சீட்டைப் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு

$$P_r(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{10}\left(\frac{9}{10}\right)^{x-1}, & x = 1, 2, \ldots \\ 0, & \text{மற்றபடி} \end{cases}$$

ஆகும்.

pஐச் சுட்டுறுப்பாகக் கொண்ட பெருக்கல் மாறி Y-ன் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு

$$M(t) = E\left(e^{ty}\right)$$

$$= \sum_{y} e^{ty} f_Y(y)$$

$$= \sum_{y=1}^{\infty} p\,(1-p)^y \; e^{ty}$$

$$= \frac{pe^t}{[1-(1-p)\,e^t]}$$

ஆகும்.

விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சாரபு $M(t)$ வாயிலாக, Y-மாறியின் சராசரி, மாறுபாடு ஆகியவைகளைக் கீழ்க் கண்டவாறு பெறுகிறோம்.

$$m_1 = E(Y) = \left[\frac{d}{dt} M(t)\right]_{t=0} = \frac{1}{p}$$

$$m_2 = E(Y^2) = \left[\frac{d^2}{dt^2} M(t)\right]_{t=0} = \frac{1}{p} + \frac{2(1-p)}{p^2}$$

$$\therefore \quad \sigma_Y^2 = m_2 - m_1^2$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{2(1-p)}{p^2} - \frac{1}{p^2}$$

$$= \frac{1-p}{p^2}$$

தேற்றம்

Y-மாறியின் பரவல் p யைச் சுட்டுறுப்பாகக் கொண்ட பெருக்கற் பரவலாகும் எனக் கொள்வோம். K ஆனது ஒரு மிகை முழு எண் எனில்,

$$P_r(Y = k + y \mid y > k) = P_r(Y = y)$$

ஆகும்.

தெரிப்பு

pயைச் சுட்டுறுப்பாகக் கொண்ட பெருக்கல் மாறி Y-ன் நிகழ்தகவுத் திணிவுச் சார்பு

$$f_Y(y) = p(1-p)^{y-1}, \quad y = 1, 2, 3, \ldots$$
$$= 0, \qquad \text{மற்றபடி}$$

ஆகும்.

$$P_r(y > k) = \sum_{y>k} f_Y(y)$$

$$= \sum_{y=k+1}^{\infty} p(1-p)^{y-1}$$

$$= p(1-p)^k + p(1-p)^{k+1} + p(1-p)^{k+2} + \cdots$$

$$= p(1-p)^k \sum_{z=0}^{\infty} (1-p)^z = (1-p)^k$$

இப்பொழுது, $P_r(Y = k+y \mid y > k) = \dfrac{P_r[(y = k+y) \cap (y > k)]}{P_r(y > k)}$

$$= \frac{P_r(Y = k+y)}{P_r(Y > k)}$$

$$= \frac{P(1-p)^{k+y-1}}{(1-p)^k}$$

$$= p(1-p)^{y-1}$$

$$= P_r(Y=y)$$

ஆகும்.

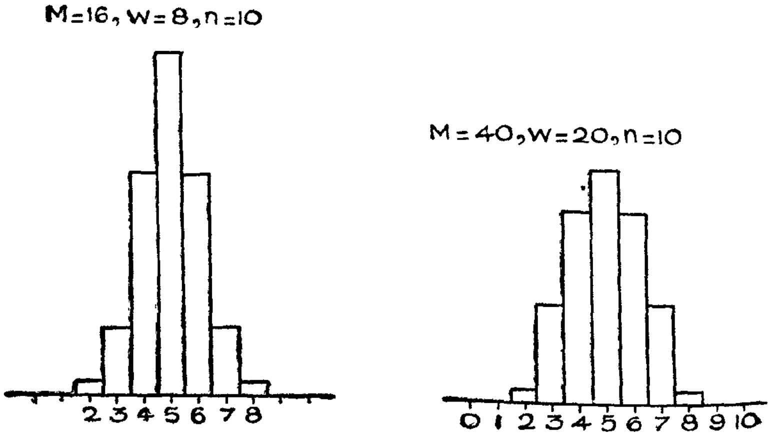
அதி பெருக்கற் பரவல் (Hyper Geometric Distribution)

M, w, n ஆகியன மிகை முழு எண்கள் எனவும், k ஆனது w, n ஆகியவைகளின் சிறுமம் எனவும் கொள்வோம். தனித்த ராண்டம் மாறி X-ன் நிகழ்தகவுத் திணிவுச் சார்பு

$$f_X(x) = \frac{\binom{w}{x}\binom{M-w}{n-x}}{\binom{M}{n}}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, k$$

எனில், X-மாறியை அதி பெருக்கல் மாறியெனவும், அதன் பரவலை அதி பெருக்கற் பரவல் எனவும் அழைக்கிறோம்.

மிகை முழு எண்கள் M, w, n ஆகியவைகளைப் பரவலின் சுட்டுறுப்புகள் என்கிறோம்.



படம் 3.5
அதி பெருக்கற் பரவல்கள்

இப்போது,

$$\sum_{x=0}^{k} f(x) = \sum_{x=0}^{k} \frac{\binom{w}{x}\binom{M-w}{n-x}}{\binom{M}{n}} = 1$$

ஆகும்.

ஒரு பையில் உள்ள வெள்ளைப் பந்துகளின் எண்ணிக்கை w எனவும், கறுப்புப் பந்துகளின் எண்ணிக்கை $(M-w)$ எனவும் கொள்வோம். பையிலிருந்து n பந்துகள் கொண்ட ஒரு கூறு எடுக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{1}{\binom{M}{w}}$ என்போம்.

அக்கூறில் இடம் பெறும் வெள்ளைப் பந்துகளின் எண்ணிக்கையை X-மாறி கொண்டு குறிப்பிடும்போது X-மாறியின் பரவல் M, w, n ஆகியவைகளைச் சுட்டுறுப்புகளாகக் கொண்ட அதி பெருக்கப் பரவலாகும்.

n பந்துகள் கொண்ட கூறில் இடம்பெறும் வெள்ளைப் பந்துகளின் எண்ணிக்கை x எனில், எஞ்சியுள்ள $(n-x)$ பந்துகள் கறுப்பு நிறமானவைகளாகின்றன. பையிலுள்ள W வெள்ளைப் பந்துகளிலிருந்து x பந்துகளைத் தேர்ந்தெடுக்கச் சாதகமான வழிகளின் எண்ணிக்கை $\binom{W}{n}$ ஆகவும், $(M-W)$ கறுப்புப் பந்துகளிலிருந்து $(n-x)$ பந்துகளைத் தேர்ந்தெடுக்கச் சாதகமான வழிகளின் எண்ணிக்கை $\binom{M-W}{n-x}$ ஆகவும் அமைவதால், தேவையான கூறு பெறுவதற்குச் சாதகமாக அமையும் ஆதாரமான நிகழ்ச்சிகள் எண்ணிக்கை $\binom{W}{x}\binom{M-W}{n-x}$. இவைகள் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளாகவும் சமவாய்ப்பு நிகழ்ச்சிகளாகவும் அமைகின்றன.

M பந்துகள் உள்ள பையிலிருந்து n பந்துகள் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் ஆதார நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு $1 \Big/ \binom{M}{n}$ என அமைவதால்

$$P\,(X=x) \;=\; \frac{\binom{W}{x}\binom{M-W}{n-x}}{\binom{M}{n}}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, k$$

$$= 0\;,\; \text{மற்றபடி}$$

ஆகும்.

$M = 10$, $W = 4$, $n = 2$ எனும் சுட்டுறுப்புகளைக் கொண்ட அதிபெருக்கல் மாறியின் பரவல்

x	நிகழ்தகவு		
0	$\binom{4}{0}\binom{6}{2} / \binom{10}{2}$	=	0·33
1	$\binom{4}{1}\binom{6}{1} / \binom{10}{2}$	=	0·53
2	$\binom{4}{2}\binom{6}{0} / \binom{10}{2}$	=	1·13

ஆகும்.

இப்போது M, W, n ஆகியவைகளைச் சுட்டுறுப்புகளாகக் கொண்ட அதி பெருக்கல் மாறி X-ன் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு, மாறுபாடு ஆகியவைகளைப் பெறுவோம்.

$$E\,(x) \;=\; \sum_{x=0}^{k} x\,\frac{\binom{W}{x}\binom{M-W}{n-x}}{\binom{M}{n}}$$

$$= \frac{W}{\binom{M}{n}} \sum_{(x-1)=0}^{k} \binom{W-1}{x-1}\binom{(M-1)-(W-1)}{(n-1)-(x-1)}$$

$$= \frac{W}{\binom{M}{n}}\binom{M-1}{n-1}$$

$$= \frac{Wn}{M}$$

$$E(x^2) = \sum_{x=0}^{k} x^2 \binom{W}{x}\binom{M-W}{n-W}$$

$$= \sum_{x=0}^{k} [x(x-1) + x] \frac{\binom{W}{x}\binom{M-W}{n-x}}{\binom{M}{n}}$$

$$= \frac{1}{\binom{M}{n}} \left[\sum_{x=0}^{k} x(x-1)\binom{W}{x}\binom{M-W}{n-x} + \sum_{x=9}^{k} x \binom{W}{x}\binom{M-W}{n-x} \right]$$

$$= \frac{1}{\binom{M}{n}} \left[W(W-1) \sum_{(x-2)=0}^{k} \binom{W-2}{x-2} \binom{(M-2)-(W-2)}{(n-2)-(x-2)} - W \sum_{x-1)=0}^{k} \binom{W-1}{x-1}\binom{(M-1)-(W-1)}{(n-1)-(x-1)} \right]$$

$$= \frac{1}{\binom{M}{n}} \left[W(W-1)\binom{M-2}{n-2} + W\binom{M-1}{n-1} \right]$$

$$= \frac{Wn}{M} \left[\frac{(W-1)(n-1)}{(M-1)} + 1 \right]$$

ஆகும்.

$$\sigma_x^2 = E(x^2) - [E(x)]^2$$

$$= \frac{Wn}{M} \left[\frac{(W-1)(n-1)}{(M-1)} + 1 - \frac{Wn}{M} \right]$$

$$= n \cdot \frac{W}{M} \cdot \frac{(M-n)}{M} \cdot \frac{(M-W)}{(M-1)}$$

ஆகும்.

பல்லுறுப்புப் பரவல் (Multinomial Distribution)

'n' ஒரு மிகை முழு எண் எனவும், $p_1, p_2, \ldots, p_{k-1}, p_k$ ஆகியன (0, 1) இடைவெளியில் அமைந்து $p_1 + p_2 + \ldots + p_k = 1$ எனும் நிபந்தனைக்குட்பட்டுள்ளன எனவும் கொள்வோம்.

0, 1, 2, ..., n ஆகிய முழு எண்கள் அடங்கியுள்ள கணத்தை

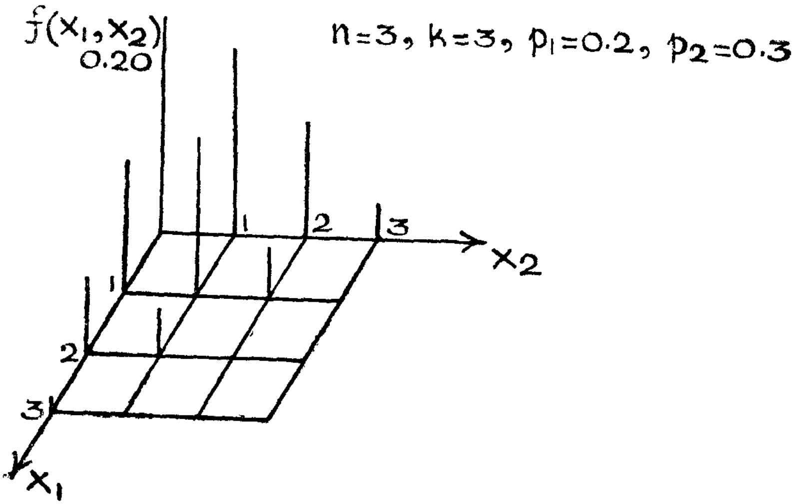
$$A = \{0, 1, 2, \ldots, (n-1), n\}$$

எனக் குறிப்பிடுவோம்.

$X_1, X_2, \ldots, X_{k-1}$ ஆகிய தனித்த ராண்டம் மாறிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவு

$$Prob\,(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_{k-1} = x_{k-1})$$
$$= f(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1})$$
$$= \frac{n!}{x_1!\, x_2! \ldots x_{k-1}!\, x_k!}\; p_1^{\,x_1}\; p_2^{\,x_2} \ldots p_{k-1}^{\,x_{k-1}}\; p_k^{\,x_k},$$
$$x_i \in A, i = 1, 2 \ldots, (k-1)$$
$$x_k = n - x_1 - x_2 - \ldots - x_{k-1}$$

எனில், இப்பரவலைப் **பல்லுறுப்புப் பரவல்** எனவும் $X_1, X_2, \ldots, X_{k-1}$ ஆகிய மாறிகளை $n, p_1, \ldots, p_{k-1}$ ஆகியவைகளைச் சுட்டுறுப்புகளாகக் கொண்ட பல்லுறுப்பு மாறிகள் எனவும் அழைக்கிறோம்.



படம் 3.6
பல்லுறுப்புப் பரவல்

இப்போது $\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}} f(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1})$

$$= \sum_{x_1, x_2, \ldots, x_k} \frac{n!}{x_1!\, x_2! \ldots x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots p_k^{x_k}$$

$$= (p_1 + p_2 + \ldots + p_k)^n$$

$$= 1$$

ஆகும்.

ஒரு ராண்டம் சோதனையின் விளைவு, $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ஆகியன ஒன்றையொன்று விலக்கும் k நிகழ்ச்சிகளில் ஏதேனுமொரு நிகழ்ச்சியெனவும், A_i நிகழ்ச்சி ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவு p_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ எனவும், $p_1 + p_2 + \ldots + p_k = 1$ எனவும் கொள்வோம். சோதனையை 'n' முறைகள் சார்பற்றனவாகவும், முழுதொத்தனவாகவும் திரும்பத் திரும்ப மேற்கொள்ளும்போது $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ஆகிய நிகழ்ச்சிகள் ஏற்படும் எண்ணிக்கைகளை முறையே $X_1, X_2, \ldots, X_k$ எனக் குறிப்பிடுவோம். அப்போது $X_1, X_2, \ldots, X_k$ ஆகிய மாறிகள் ஒவ்வொன்றும் $0, 1, 2, \ldots, n$ ஆகிய முழு எண் மதிப்புகளில் ஏதேனுமொன்றைப் பெற்று $X_1 + X_2 + \ldots + X_k = n$ எனும் நிபந்தனைக்குட்பட்டு அமைகின்றன.

$X_1, X_2, \ldots, X_{k-1}$ ஆகிய மாறிகளின் கண்டறிந்த மதிப்புகள் முறையே $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ எனில், சோதனையை n முறைகள் மேற்கொள்ளும்போது, A_1 நிகழ்ச்சி x_1 முறைகளிலும், A_2 நிகழ்ச்சி x_2 முறைகளிலும், ... A_i நிகழ்ச்சி x_i முறைகளிலும், ... A_{k-1} நிகழ்ச்சி x_{k-1} முறைகளிலும், A_k நிகழ்ச்சி $x_k = (n - x_1 - x_2 - \ldots\ldots - x_{k-1})$ முறைகளிலும் ஏற்பட்டுள்ளன என்பதாகும்.

n முறைகளில் நிகழ்ச்சி A_1 ஆனது x_1 முறைகள் ஏற்படுவதற்குச் சாதகமாக $\binom{n}{x_1}$ வழிகளும், நிகழ்ச்சி A_1 ஏற்பட்ட பிறகு எஞ்சியுள்ள $(n - x_1)$ முறைகளில் நிகழ்ச்சி A_2 ஆனது x_2 முறைகளில் ஏற்படுவதற்குச் சாதகமாக $\binom{n - x_1}{x_2}$ வழிகளும், நிகழ்ச்சிகள் A_1, A_2 ஆகியவைகள் ஏற்பட்டபிறகு எஞ்சியுள்ள $(n - x_1 - x_2)$ முறைகளில் நிகழ்ச்சி A_3 ஆனது x_3 முறைகள் ஏற்படுவதற்குச் சாதகமாக $\binom{n - x_1 - x_2}{x_3}$ வழிகளும், ... நிகழ்ச்சி $A_1, A_2, \ldots, A_{k-2}$ ஆகியவைகள் ஏற்பட்டபிறகு எஞ்சியுள்ள $(n - x_1 - x_2 - \ldots - x_{k-2})$ முறைகளில் நிகழ்ச்சி A_{k-1} ஆனது x_{k-1} முறைகள் ஏற்படுவதற்குச்

சாதகமாக $\binom{n-x_1-x_2-\ldots-x_{k-2}}{x_{k-1}}$ வழிகளும் நிகழ்ச்சி A_k ஏற்படுவதற்குச் சாதகமாக எஞ்சியுள்ள $(n-x_1-x_2-\ldots-x_{k-1}) = x_k$ முறைகளில் ஒரே ஒரு வழியும் அமைவதால், n முறைகளில் A_1 நிகழ்ச்சி x_1 முறைகளிலும், A_2 நிகழ்ச்சி x_2 முறைகளிலும், ..., A_k நிகழ்ச்சி x_k முறைகளிலும் ஏற்படுவதற்குச் சாதகமான மொத்த எண்ணிக்கை

$$\binom{n}{x_1}\binom{n-x_1}{x_2}\binom{n-x_1-x_2}{x_3}\ldots\ldots\binom{n-x_1-x_2-\ldots-x_{k-2}}{x_{k-1}}$$

$$= \frac{n!}{x_1!\,x_2!\,x_3!\ldots x_k!}$$

ஆகும். இந்த அமைப்புகள் யாவும் ஒன்றையொன்று விலக்கும் அமைப்புகளாகும். மேலும் ஒவ்வோர் அமைப்பிலும் A_1 நிகழ்ச்சி x_1 தடவையும் A_2 நிகழ்ச்சி x_2 தடவையும், ... A_k நிகழ்ச்சி x_k தடவையும் ஏற்பட்டுள்ளதால் இவைகளின் இணைந்த நிகழ்தகவு $p_1^{x_1}\,p_2^{x_2}\ldots p_k^{x_k}$ ஆகும். எனவே,

$$Pr\,(X_1=x_1, X_2=x_2, \ldots, X_{k-1}=x_{k-1}) = \frac{n!}{x_1!\ldots x_k!}\,p_1^{x_1}\,p_2^{x_2}\ldots p_k^{x_k}$$

$$\begin{cases} x_i \in A,\ i = 1, 2, \ldots, k \\ x_1+x_2+\ldots+x_k = n \end{cases}$$

ஆகும்.

எனவே X_1, X_2, ..., X_{k-1} ஆகிய மாறிகளின் பரவலானது $n, p_1, p_2, \ldots, p_{k-1}$ ஆகிய சுட்டுறுப்புகளைக் கொண்ட பல்லுறுப்புப் பரவல் என்கிறோம்.

கணக்கு

துப்பாக்கிகொண்டு சுடும் சோதனையில், இலக்கு மையத்தைப் பொது மையமாகக் கொண்ட A, B, C ஆகிய மூன்று வட்டங்கள் வரையப்பட்டுள்ளன என்போம். ஒரு நபர் சுடும்போது, தோட்டாவானது A வட்டத்திற்குள் பாய்வதற்கான நிகழ்தகவு 2/9, B வட்டத்திற்குள் பாய்வதற்கான நிகழ்தகவு 3/9, C வட்டத்திற்குள் பாய்வதற்கான நிகழ்தகவு 4/9 எனவும் கொள்வோம். சோதனையை நான்கு முறைகள் மேற்கொள்ளும்போது A, B, C ஆகிய வட்டங்களில் பாயும் தோட்டாக்களின் எண்ணிக்கைகள் முறையே X_1, X_2, X_3 எனக் குறிப்பிடுவோம். அப்போது X_1, X_2, X_3 ஆகிய மாறிகளின் நிகழ்தகவுப் பரவலானது $n = 4$, $p_1 = \frac{2}{9}$, $p_2=\frac{3}{9}$, $p_3 = \frac{4}{9}$ சுட்டுறுப்பு மதிப்புகளைக் கொண்டு பல்லுறுப்புப் பரவலாக அடுத்த பக்கத்தில் கண்டவாறு அமையும்.

X_1	X_2	X_3	நிகழ்தகவு
4	0	0	16/6561
0	4	0	81/6561
0	0	4	256/6561
3	1	0	96/6561
1	3	0	216/6561
3	0	1	128/6561
1	0	3	512/6561
0	3	1	432/6561
0	1	3	768/6561
2	2	0	216/6561
2	0	2	384/6561
0	2	2	864/6561
2	1	1	576/6561
1	2	1	864/6561
1	1	2	1152/6561

$n, p_1, p_2, \ldots, p_{k-1}$ ஆகியவைகளைச் சுட்டுறுப்புகளாகக் கொண்ட $X_1, X_2, \ldots, X_{k-1}$ ஆகிய பல்லுறுப்பு ராண்டம் மாறிகளின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகைச் சார்பு

$$M(t_1, t_2, \ldots, t_{k-1})$$

$$= \sum_{x_1, x_2, \ldots x_{k-1}} e^{t_1 x_1 + t_2 x_2 + \ldots + t_{k-1} x_{k-1}} f(x_1\, x_2 \ldots x_{k-1}),$$

$$= \sum e^{t_1 x_1 + t_2 x_2 + \ldots + t_{k-1} x_{k-1}} \frac{n!\, p_1^{x_1} \ldots p_k^{x_k}}{x_1!\, x_2! \ldots x_k!}$$

$$= \left(p_1 e^{t_1} + p_2 e^{t_2} + \ldots + p_{k-1} e^{t_{k-1}} + p_k\right)^n$$

ஆகும்.

இப்போது, X_1 மாறியின் இறுதிநிலைப் பரவலின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகைச் சார்பு

$$M(t_1, 0, 0, \ldots, 0) = (p_1 e^{t_1} + p_2 + p_3 + \ldots + p_n)^n$$
$$= [(1 - p_1) + p_1 e^{t_1}]^n$$

ஆகும். இக்கோவை n, p ஆகியவைகளைச் சுட்டுறுப்புகளாகக் கொண்ட ஈருறுப்புப் பரவலின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை யாகும்.

விலக்கப் பெருக்குத் தொகை ராண்டம் மாறியின் சார்பை ஒரு தனியாக வரையறுக்கும் பண்பின் வாயிலாக, X_1 மாறி n, p_1 ஆகியவைகளைச் சுட்டுறுப்புகளாகக் கொண்ட ஈருறுப்புப் பரவல் எனப் பெறுகிறோம்.

இதுபோன்றே, X_i மாறி n, p_i ஆகியவைகளைச் சுட்டுறுப்பு களாகக் கொண்ட ஈருறுப்புப் பரவலாகும். $i = 2, 3, 4, \ldots, (k-1)$ எனப் பெறுகிறோம்.

X_1, X_2 ஆகிய மாறிகளின் இணைந்த இறுதிநிலைப் பரவலின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு,

$$M(t_1, t_2, 0, 0, \ldots, 0) = (p_1 e^{t_1} + p_2 e^{t_2} + p_3 + p_4 + \ldots + p_n)^n$$
$$= [p_1 e^{t_1} + p_2 e^{t_2} + (1 - p_1 - p_2)]^n$$

என அமைவதால், X_1, X_2 ஆகிய மாறிகளின் இறுதி நிலைப் பரவல் சார்பு

$$f(x_1, x_2) = \frac{n!}{x_1!\, x_2!\, (n - x_1 - x_2)!}\, p_1^{x_1}\, p_2^{x_2}\, (1 - p_1 - p_2)^{n - x_1 - x_2} \quad \begin{cases} x_1, x_2 \in (0, 1, \ldots, n) \\ x_1 + x_2 \le n \end{cases}$$
$$= 0, \quad \text{மற்றபடி}$$

என்கிறோம்.

இப்போது,

$$E(X_1 X_2) = \sum_{x_1=0}^{n} \sum_{x_2=0}^{n-x_1} \frac{n!}{x_1!\, x_2!\, (n - x_1 - x_2)!}\, x_1\, x_2\, p_1^{x_1}\, p_2^{x_2}\, (1 - p_1 - p_2)^{n - x_1 - x_2}$$

$$= \sum_{x_1=1}^{n} \sum_{x_2=1}^{n-x_1} \frac{n!}{(x_1 - 1)!\,(x_2 - 1)!\,(n - x_1 - x_2)!}\, p_1^{x_1}\, p_2^{x_2}\, (1 - p_1 - p_2)^{n - x_1 - x_2}$$

$$= n(n-1)p_1 p_2 \sum_{x_1=1}^{n} \sum_{x_2=1}^{n-x_1} \frac{(n-2)!}{(x_1-1)!\,(x_2-1)!\,\{(n-2)-(x_1-1)-(x_2-1)\}!} \times \left[p_1^{x_1-1} p_2^{x_2-1} (1-p_1-p_2)^{n-x_1-x_2} \right]$$

$$= n(n-1)p_1 p_2 [p_1 + p_2 + (1-p_1-p_2)]^{n-2}$$

$$= n(n-1)p_1 p_2$$

ஆகும்.

மேலும், $E(X_i) = np_i$

$$\sigma_{x_i}^2 = np_i(1-p_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

எனவே, X_1, X_2 ஆகிய மாறிகளின் ஒட்டுறவுக்கெழு

$$e_{12} = \frac{E[X_1 - E(X_1))(X_2 - E(X_2))]}{\sigma_{x_1}\,\sigma_{x_2}}$$

$$= -\sqrt{\frac{p_1 p_2}{(1-p_1)(1-p_2)}}$$

ஆகும்.

X_2 மாறியானது ஏற்றுக்கொள்ளும் மதிப்பு x_2 எனக் கொடுக்கும் போது, X_1 மாறியின் நிபந்தனை நிகழ்தகவுப் பரவல்

$$f_{x_1/x_2}(x_1/x_2) = \frac{f(x_1, x_2)}{f(x_2)}$$

$$= \frac{(n-x_2)!}{x_1!\,(n-x_2-x_1)!} \left(\frac{p_2}{1-p_1}\right)^{x_1} \left(\frac{1-p_1-p_2}{1-p_1}\right)^{n-x_2-x_1}$$

$$x_1 = 0, 1, 2, \ldots, (n-x_2)$$

$$= 0, \text{ மற்றபடி}$$

ஆகும். இது $\left[(n-x_2), \left(\frac{p_2}{1-p_1}\right) \right]$ ஆகியவைகளைச் சுட்டுருப்புகளாகக் கொண்ட ஈருறுப்புப் பரவலாகும்.

$(X_2 = x_2)$ எனக் கொடுக்கும்போது, X_1 மாறியின்

(i) நிபந்தனை சராசரி $E(X_1/X_2 = x_2) = (n-x_2)\dfrac{p_2}{1-p_1}$ எனவும்,

(ii) நிபந்தனை மாறுபாடு $V(X_1/X_2 = x_2) = \dfrac{(n-x_2)\,p_2\,(1-p_1-p_2)}{(1-p_1)^2}$

ஆகவும் பெறுகிறோம்.

பாய்சான் பரவல் (Poissen Distribution)

λ ஒரு மிகையெண் எனக்கொள்வோம். ஒரு தனித்த ராண்டம் மாறி X-ன் நிகழ்தகவுத் திணிவுப் பரவல்

$$f_X(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

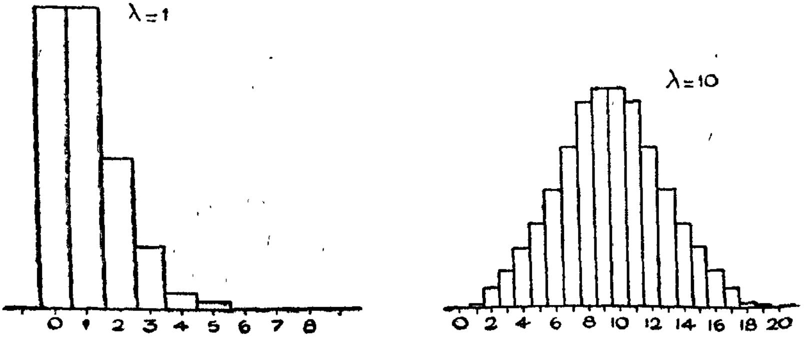
$$= 0, \quad \text{மற்றபடி}$$

எனில், இப்பரவலைப் பாய்சான் பரவல் என்றும், X மாறியைப் பாய்சான் ராண்டம் மாறி எனவும் அழைக்கிறோம். λயைப் பாய்சான் பரவலின் சுட்டுறுப்பு எனக் குறிப்பிடுகிறோம்.

இப்போது, $\sum_{x=0}^{\infty} f_X(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$

$$= e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$



படம் 3·7
பாய்சான் பரவல்கள்

இப்போது, பாய்சான் மாறியின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பைப் பெறுவோம்.

λ யைச் சுட்டுறுப்பாகக் கொண்ட பாய்சான் மாறி X-ன் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு

$$M(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} f_X(x)$$

$$= \sum_{x=6}^{\infty} e^{tx} \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x}}{X!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{t})^{x}}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} e^{\lambda e^{t}}$$

$$= e^{\lambda (e^{t}-1)}$$

ஆகும்.

t-ன் எல்லா மெய்யெண் மதிப்புக்கும் $M(t)$ சார்பு உளதா யிருக்கிறது.

X மாறியின் முதல் நான்கு விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் கீழ்க்கண்டவாறு அமைகின்றன.

$$m_1 = \left\{ \frac{d}{dt} [e^{\lambda (e^{t}-1)}] \right\} = \lambda$$

$$m_2 = \left\{ \frac{d^2}{dt^2} [e^{\lambda (e^{t}-1)}] \right\} = \lambda^2 + \lambda$$

$$m_3 = \left\{ \frac{d^3}{dt^3} [e^{\lambda (e^{t}-1)}] \right\} = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda$$

$$m_4 = \left\{ \frac{d^4}{dt^4} [e^{\lambda (e^{t}-1)}] \right\} = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 7\lambda^2 + \lambda$$

இவைகளின் வாயிலாக X-ன் சராசரி, மாறுபாடு, மூன்ருவது, நான்காவது நடு விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள், பீட்டா கெழுக்கள் ஆகியவைகளைப் பெறுகிறேம்.

$$E(X) = m_1 = \lambda$$

$$\sigma_x^2 = m_2 - m_1^2 = \lambda$$

$$\mu_3 = m_3 - 3m_2 m_1 + 2m_1^3 = \lambda$$

$$\mu_4 = m_4 - 4m_3 m_1 + 6m_2 m_1^2 - 3m_1^4$$

$$= 3\lambda^2 + \lambda$$

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = \frac{\lambda^2}{\lambda^3} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = 3 + \frac{1}{\lambda}$$

இப்போது, λவைச் சுட்டுறுப்பாகக் கொண்ட பாய்சான் மாறியின் r-வது நடுவிலக்கப் பெருக்குத் தொகை

$$\mu_r = \sum_{x=0}^{\infty} (X-\lambda)^r \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x}}{X!}$$

ஆகும். இக்கோவையில் λவைக் குறித்து வகைகாணும்போது

$$\frac{d\mu_r}{d\lambda} = \sum_{x=0}^{\infty} \left\{ -r(X-\lambda)^{r-1} \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x}}{X!} - \frac{(x-\lambda)^r e^{-\lambda} \lambda^{x}}{X!} + (X-\lambda)^r \frac{e^{-\lambda} X\lambda^{x-1}}{X!} \right\}$$

$$= \left\{ -r\mu_{r-1} + \frac{1}{\lambda} \mu_{r+1} \right\}$$

அதாவது, $\mu_{r+1} = \lambda \left\{ r\mu_{r+1} + \frac{d\mu_r}{d\lambda} \right\}$ ஆகும்.

இது பாய்சான் மாறியின் $(r+1)$-வது, r-வது, $(r-1)$-வது நடு விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளைத் தொடர்புற அமைக்கும் சமன்பாடு ஆகும். இங்கு $r = 1, 2, 3, \ldots$ ஆகும்.

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ ஆகிய சார்பற்ற பாய்சான் ராண்டம் மாறிகளின் சுட்டுறுப்புக்கள் முறையே $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ எனில், $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ மாறியின் பரவல் சுட்டுறுப்பு $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$ ஐக் கொண்ட பாய்சான் பரவலாக அமைகிறது என்பதைப் பின்வரும் அத்தியாயத்தில் காண்போம்.

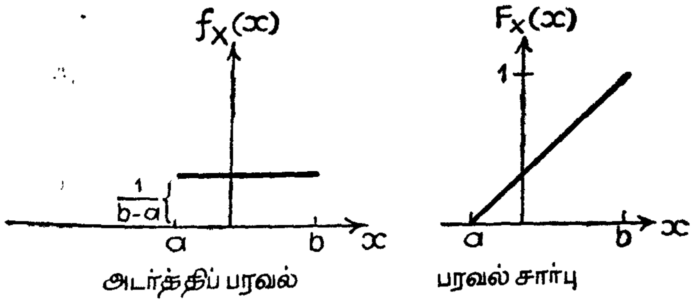
சீரான பரவல் (Uniform Distribution)

a, b ஆகியன $a < b$ எனும் நிபந்தனைக்குட்படும் இரு மெய்யெண்கள் என்போம். ஒரு ராண்டம் மாறி X-ன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a < x < b$$

$$= 0, \quad \text{மற்றபடி}$$

எனில், X-மாறியை இடைவெளி (a, b)யில் வரையறை செய்யப்படும் சீரான ராண்டம் மாறி எனவும், அதன் பரவலைச் சீரான பரவல் எனவும் அழைக்கிறோம். சீரான பரவலானது, செவ்வக மான பரவல் (Rectangular Distribution) எனவும் வழங்கப் படுகிறது.



படம் 3.8
சீரான பரவல்

இப்பொழுது,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot dx = \int_a^b \frac{dx}{(b-a)}$$

$$= \frac{1}{b-a}[x]_a^b$$

$$= \frac{(b-a)}{(b-a)}$$

$= 1$ ஆகும்.

X-மாறியின் பரவல் சார்பு

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u) \cdot du$$

$$= 0 \,, \qquad x < a$$

$$= \frac{(x-a)}{(b-a)} \,, \qquad a \leq x \leq b$$

$$= 1 \,, \qquad x > b$$

ஆகும். இடைவெளி (a, b)யில் வரையறை செய்யப்பட்டுள்ள சீரான மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு, பரவல் சார்பு ஆகியவைகள் படம் (3.8)-ல் காட்டப்பட்டுள்ளன.

X-மாறியின் பரவலானது (a, b)யில் வரையறை செய்யப் பட்டுள்ள சீரான பரவல் எனில், அதன் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு

$$M(t) = E\left(e^{tx}\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_x(x) \cdot d_x = \frac{1}{b-a} \int_a^b e^{tx} \cdot dx$$

$$= \frac{e^{bt} - e^{at}}{(b-a)t}, \quad t \neq 0$$

$$= 1, \quad t = 0$$

ஆகும்.

இப்போது, X-மாறியின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு $M(t)$ஐ, t-ன் படித்தொடராக விரித்து அதன் சராசரி, மாறுபாடு ஆகியவைகளைப் பெறுவோம்.

$$M(t) = \frac{e^{bt} - c^{at}}{(b-a)t}$$

$$= \frac{1}{(b-a)} \left[(b-a) + (b^2 - a^2)\frac{t}{2!} + (b^3 - a^3)\frac{t^2}{3!} + \ldots\ldots \right]$$

$E(X) = M(t)$ சார்பின் விரிப்புத் தொடரில் t-ன் கெழு

$$= \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)}$$

$$= \frac{b+a}{2}$$

எனவே, X-மாறியின் சராசரி $\frac{b+a}{2}$ ஆகும்.

$E(X^2) = M(t)$ சார்பின் விரிப்புத் தொடரில் t^2-ன் கெழு

$$= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)}$$

$$= \frac{b^2 + ba + a^2}{3}$$

X-மாறியின் மாறுபாடு

$$\sigma_x^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= \frac{b^2 + ba + a^2}{3} - \frac{(b+a)^2}{2}$$

$$= \frac{(b-a)^2}{12}$$

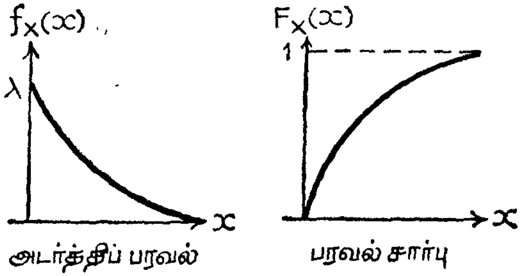
ஆகும்.

அடுக்குக்குறி பரவல் (Exponential Distribution)

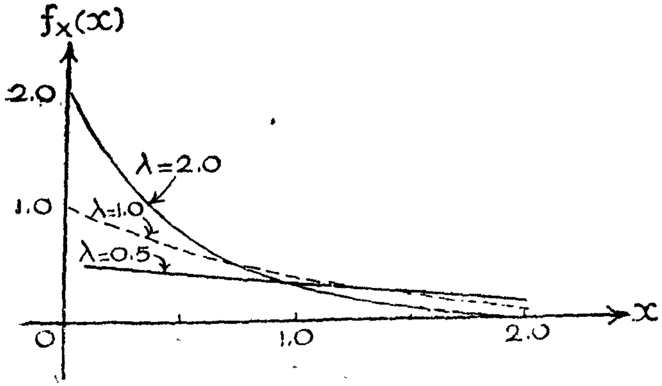
λ ஒரு மிகையெண் எனக் கொள்வோம். X ராண்டம் மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \qquad x > 0$$
$$= 0, \qquad \text{மற்றபடி}$$

எனில், X-மாறியை அடுக்குக்குறி மாறி எனவும், அதன் பரவலை அடுக்குக்குறி பரவல் எனவும் அழைக்கிறோம். λஐ அடுக்குக்குறி பரவலின் சுட்டுறுப்பு என்கிறோம்.



படம் 3.9 (a)
அடுக்குக்குறி பரவல்



3.9 (b)
அடுக்குக்குறி அடர்த்திப் பரவல்கள்

இப்போது,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) \cdot dx = \int_{0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} \cdot dx$$
$$= [e^{-\lambda x}]_0^{\infty}$$
$$= 1$$

ஆகும்.

X-மாறியின் பரவல் சார்பு

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(t) \cdot dt$$

$$= \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t} \cdot dt = 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

ஆகும்.

அடுக்குக் குறி மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு, பரவல் சார்பு ஆகியவைகள் படம் (3.9 a)-ல் காட்டப்பட்டுள்ளன. சுட்டுறுப்பு λ-ன் மதிப்பு 0·5, 1·0, 2·0 ஆகியவைகளைக் கொண்டு அடுக்குக்குறி அடர்த்திப் பரவல்கள் படம் (3.9 b)-ல் இடம் பெறுகின்றன.

கணக்கு

மின்னணுக் குழல்களின் இயங்கும் காலத்தை மணிகளில் குறிக்கும் மாறி *X* எனவும், அதன் பரவல் $\lambda = \frac{1}{1000}$ ஐச் சுட்டுறுப்பாகக் கொண்ட அடுக்குக்குறி பரவல் எனவும் கொள்வோம். இத்தகைய மின்னணுக் குழல்களில் 5 குழல்கள் ஒரு கருவியில் பொருத்தப்பட்டுள்ளன எனவும், எல்லாக் குழல்களும் இயங்கினால்தான் கருவியும் இயங்குமெனவும், குழல்கள் சார்பற்ற வாறு இயங்குகின்றன எனவும் கொள்வோம்.

இப்போது,

X-மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$$f(x) = \frac{1}{1000} e^{-\frac{x}{1000}}, \quad x > 1000$$
$$= 0, \quad \text{மற்றபடி}$$

ஆகும்.

$$\left.\begin{array}{l}\text{ஒரு மின்னணுக் குழலானது குறைந்த பட்சம்}\\ a \text{ மணிகள் இயங்குவதற்கான நிகழ்தகவு}\end{array}\right\} = P_r(x>a)$$

$$= \int_a^{\infty} f(x)\,dx = \int_a^{\infty} \frac{1}{1000}\, e^{-\frac{x}{1000}}\, dx = e^{-\frac{a}{1000}}$$

கருவியில் பொருத்தப்பட்டுள்ள 5 மின்னணுக் குழல்கள் சார்பற்ற வாறு இயங்குவதால், கருவி குறைந்த பட்சம் a மணிகள் இயங்கும் நிகழ்ச்சியானது 5 குழல்கள் ஒவ்வொன்றும் குறைந்த பட்சம் 'a' மணிகள் இயங்கும் இணை நிகழ்ச்சியாகும்.

கருவியின் இயங்கும்காலத்தை Y-மாறி கொண்டு குறிப்போம். அப்போது கருவி குறைந்த பட்சம் 'a' மணிகள் இயங்குவதற்கான நிகழ்தகவு

$$P_r(Y>a) = \left[e^{-\frac{a}{1000}}\right]^5 = e^{-\frac{a}{200}}$$

ஆகும்.

$a=100$ எனில், $P_r(Y>100) = e^{-\frac{1}{2}} = 0 \cdot 6065$

$a=1000$ எனில், $P_r(Y>1000) = e^{-5} = 0 \cdot 0067$

X மாறியானது λஐச் சுட்டுறுப்பாகக் கொண்ட அடுக்குக்குறி மாறியெனில், அதன் சராசரி மாறுபாடு ஆகியவைகளை இப்போது பெறுவோம்.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_0^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x} \cdot dx = \frac{1}{\lambda}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) \cdot dx = \int_0^{\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x} \cdot dx = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$\therefore \sigma_x^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

எனவே, λஐச் சுட்டுறுப்பாகக் கொண்ட அடுக்குக்குறி மாறியின் சராசரி $\frac{1}{\lambda}$, மாறுபாடு $\frac{1}{\lambda^2}$ ஆகின்றன.

X-மாறியின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு

$$M(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) \cdot dx$$

$$= \int_{0}^{\infty} \lambda e^{-x(\lambda - t)} \cdot dx$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda - t}, \quad t < \lambda$$

$$= \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-1}, \quad t < \lambda$$

ஆகும்.

தேற்றம்

Y-மாறியின் பரவல் λஐச் சுட்டுறுப்பாகக்கொண்ட அடுக்குக் குறி பரவல் எனவும், a, b ஆகியன இரு மெய்யெண்கள் எனவும் கொள்வோம். அப்போது,

$$P_r(Y > a + b / Y > a) = P_r(Y > b)$$

ஆகும்.

தெரிப்பு

Y-மாறியின் மதிப்பு 'a'க்குக் கூடுதலாக நிகழும் நிகழ்ச்சியை A எனவும், அம்மதிப்பு 'b' க்குக் கூடுதலாக நிகழும் நிகழ்ச்சியை 'B' எனவும், $(a+b)$ க்குக் கூடுதலாக நிகழும் நிகழ்ச்சியை C எனவும் குறிப்பிடுபோம். அப்போது,

$$P_r(Y > (a+b)/Y = a) = P_r(C/A)$$
$$P_r(Y > b) = P_r(B)$$
$$P_r(Y > a) = P_r(A)$$

ஆகின்றன.

நிபந்தனை நிகழ்தகவு $P_r(C/A)$ ஆனது $P_r(A)$, $P_r(C \cap A)$ ஆகியவைகளுடன் கீழ்க்கண்டவாறு

$$P_r(C/A) = \frac{P_r(C \cap A)}{P_r(A)}$$

தொடர்புறுகிறது.

இப்போது $C \subset A$ என அமைவதால், $C \cap A = C$ ஆகும்.

ஆதலால், $P_r(C/A) = \dfrac{P_r(C)}{P_r(A)}$

இப்போது,

$$P_r(A) = P_r(Y > a) = \int_a^{\infty} \lambda e^{-\lambda y} . dy = e^{-\lambda a}$$

$$P_r(B) = P_r(Y > b) = \int_b^{\infty} \lambda e^{-\lambda y} . dy = e^{-\lambda b}$$

$$P_r(C) = P_r(Y > a + b) = \int_{a+b}^{\infty} \lambda e^{-\lambda y} . dy = e^{-\lambda(a+b)}$$

ஆகின்றன.

$$\text{எனவே, } P_r(C/A) = \frac{P_r(C)}{P_r(A)} = \frac{e^{-\lambda(a+b)}}{e^{-\lambda a}}$$

$$= e^{-\lambda b}$$

$$= P_r(B)$$

$$P_r(Y > a + b/Y > a) = P_r(Y > b)$$

என்கிறோம்.

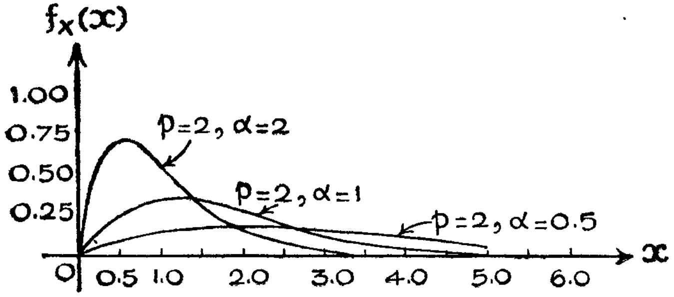
காமா பரவல் (Gamma Distribution)

α, p ஆகியவைகள் இரு மிகையெண்கள் எனக் கொள்வோம். ராண்டம் மாறி X-ன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$$f_X(x) = \frac{\alpha^p}{\lceil p} e^{-\alpha x} x^{p-1}, \quad x \geq 0$$

$$= 0, \quad x < 0$$

எனில், X-மாறியை α, p ஆகியவைகளைச் சுட்டுறுப்புகளாகக் கொண்ட காமா மாறி எனவும், அதன் பரவலைக் காமா பரவல் எனவும் அழைக்கிறோம்.



படம் 3.10
காமா அடர்த்திப் பரவல்கள்

இப்போது,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot dx = \int_{0}^{\infty} \frac{\alpha^p}{\lceil p} e^{-\alpha x} \cdot x^{p-1} \cdot dx$$

$$= \frac{1}{\lceil p} \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha x} \cdot (\alpha x)^{p-1} \cdot d(\alpha x)$$

$$= \frac{\lceil p}{\lceil p}$$

$$= 1$$

ஆகும்.

α, p ஆகியவைகளைச் சுட்டுறுப்புகளாகக் கொண்ட காமா பரவலில் $p = 1$ எனக் கொள்ளும்போது

$$f_X(x) = \alpha e^{-\alpha x}, \qquad x \geq 0$$
$$= 0, \qquad x < 0$$

ஆக அமைகிறது. இப்பரவல் αஐச் சுட்டுறுப்பாகக் கொண்ட அடுக்குக்குறிப் பரவலாகும்.

சுட்டுறுப்பு α-ன் மதிப்பு 1/2 ஆகவும், சுட்டுறுப்பு p ஒரு மிகை முழு எண்ணுகவும் அமையும்போது காமா மாறி X-ன் பரவல்

$$f_X(x) = \frac{1}{\alpha^p \lceil p} e^{-x/2} \cdot x^{p-1}, \qquad x > 0$$
$$= 0, \qquad \text{மற்றபடி}$$

ஆக அமையும். இதை $2p$ கட்டின்மை கொண்ட கைவர்க்கப் பரவல் என அழைக்கிறோம்.

α, p ஆகியவைகளைச் சுட்டுறுப்புகளாகக் கொண்ட காமா பரவலின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பை இப்போது பெறுவோம்.

$$M(t) = E\left(e^{tx}\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot f(x) \cdot dx$$

$$= \frac{\alpha^p}{\Gamma p} \int_0^{\infty} e^{-x(\alpha - t)} \cdot x^{p-1} dx$$

$$= \frac{\alpha^p}{(\alpha - t)^p}$$

$$= \frac{1}{\left(1 - \frac{t}{\alpha}\right)^p}, \qquad t < \frac{1}{\alpha}$$

ஆகும்.

விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பு வாயிலாக X- மாறியின் சராசரி, மாறுபாடு ஆகியவைகளைப் பெறுவோம்.

$$E(X) = \left[\frac{d}{dt} M(t)\right]_{t=0}$$

$$= \left[\frac{p}{\alpha\left(1 - \frac{t}{\alpha}\right)^{p+1}}\right]_{t=0}$$

$$= \frac{p}{\alpha}$$

$$E(X^2) = \left[\frac{d^2}{dt^2} M(t)\right]_{t=0}$$

$$= \left[\frac{p(p+1)}{\alpha^2\left(1 - \frac{t}{\alpha}\right)^{p+2}}\right]_{t=0}$$

$$= \frac{p(p+1)}{\alpha^2}$$

$$\sigma_x^2 = E(x^2) - [E(x)]^2$$
$$= \frac{p(p+1)}{\alpha^2} - \frac{p^2}{\alpha^2}$$
$$= \frac{p}{\alpha^2}$$

ஆகவே,

X-மாறியின் சராசரி, $E(X) = p/\alpha$

மாறுபாடு, $\sigma_x^2 = p/\alpha^2$

என்கிறோம்.

α, p_i ஆகிய சுட்டுறுப்புகளைக் கொண்ட காமா ராண்டம் மாறி X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ எனவும், $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ஆகியன சார்பற்றன எனவும் கொள்ளும் போது, Y-மாறியின் $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ பரவல் α, $(p_1 + p_2 + \ldots + p_n)$ ஆகியவைகளைச் சுட்டுறுப்புகளாகக் கொண்ட காமா பரவலாகும் எனும் தேற்றத்தைப் பின் வரும் அத்தியாயத்தில் காண்போம்.

α, p ஆகிய சுட்டுறுப்புகளைக் கொண்ட காமா ராண்டம் மாறி X-ன் மதிப்பு நிலையெண் 'a' -க்குக் குறைவாக அமைவதற்கான நிகழ்தகவு

$$P_r(X < a) = \int_0^a \frac{\alpha^p}{\lceil p} e^{-\alpha x} \cdot x^{p-1} \cdot dx$$

$$= \int_0^a \frac{e^{-\alpha x}(\alpha x)^{p-1}}{\lceil p} d(\alpha x)$$

$$= \frac{\int_0^a e^{-v} \cdot v^{p-1} \cdot dv}{\int_0^\infty e^{-v} \cdot v^{p-1} \cdot dv}$$

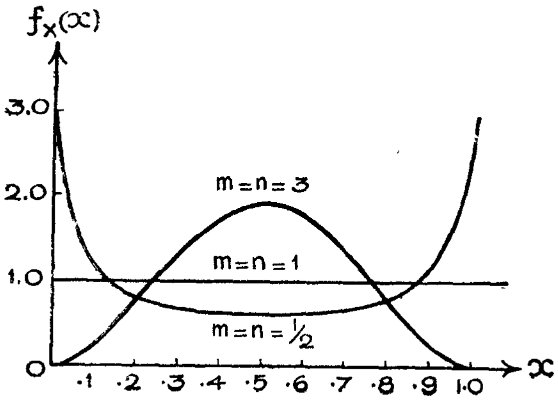
ஆகும். வலது புறம் அமைந்துள்ள தொகைகளின் விகிதத்தை முழுமைபெறாத காமா சார்பு **(Incomplete Gamma function)** என அழைக்கிறோம்.

பீட்டா பரவல் (Beta Distribution)

m, *n* ஆகியவைகள் இரு மிகையெண்கள் என்போம். ராண்டம் மாறி *X*-ன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$$f_X(x) = \frac{\lfloor m+n}{\lfloor m \lfloor n} x^{m-1} (1-x)^{n-1}, \qquad 0 < x < 1$$
$$= 0, \qquad \text{மற்றபடி}$$

எனில், *X*-மாறியை *m*, *n* ஆகியவைகளைச் சுட்டுறுப்புகளாகக் கொண்டு இடைவெளி (0, 1)-ல் வரையறுக்கப்படும் பீட்டா மாறி எனவும், அதன் பரவலைப் பீட்டா பரவல் எனவும் அழைக்கிறோம்.



படம் 3.11
பீட்டா அடர்த்திப் பரவல்கள்

இப்போது,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot dx = \int_{0}^{1} \frac{\lfloor m+n}{\lfloor m \lfloor n} x^{m-1} (1-x)^{n-1} \cdot dx$$
$$= 1$$

ஆகும்.

$m = 1, n = 1$ ஆகியவைகளைச் சுட்டுறுப்புகளாகக் கொண்ட பீட்டா மாறியின் பரவல்

$$f_X(x) = 1, \qquad 0 < x < 1$$
$$= 0, \qquad \text{மற்றபடி}$$

ஆகும். இது, இடைவெளி (0, 1) யில் வரையறுக்கப்பட்டுள்ள சீரான பரவலாகும். *m*, *n* ஆகியவைகளைச் சுட்டுறுப்புகளாகக் கொண்ட பீட்டா மாறியின் *K*-வது விலக்கப் பெருக்குத் தொகை

$$E(x^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot f(x) \cdot dx = \int_0^1 \frac{\overline{|m+k}}{\overline{|m}\ \overline{|n}} \cdot x^{m+k-1} \cdot (1-x)^{n-1} \cdot dx$$

$$= \frac{\overline{|(m+n)}\ \ \overline{\surd m+k}}{\overline{|m}\ \ \overline{\surd m+n+k}}$$

ஆகும்.

$$E(x^2) = \frac{\overline{|(m+n)}\ \ \overline{|(m+2)}}{\overline{|m}\ \ \overline{|(m+n+2)}} = \frac{m\,(m+1)}{(m+n)\,(m+n+1)}$$

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= \frac{m\,(m+1)}{(m+n)\,(m+n+1)} - \frac{m^2}{(m+n)^2}$$

$$= \frac{m\,n}{(m+n)^2\,(m+n+1)}$$

ஆகவே, m, n ஆகியவைகளைச் சுட்டுறுப்புகளாகக் கொண்ட பீட்டா மாறியின் சராசரி,

$$E(X) = \frac{m}{m+n} \quad \text{ஆகவும்,}$$

மாறுபாடு, $\sigma_X^2 = \dfrac{m\,n}{(m+n)^2\,(m+n+1)}$ ஆகவும் அமைகின்றன.

தேற்றம்

X-மாறியானது m, n ஆகியவைகளைச் சுட்டுறுப்புகளாகக் கொண்ட பீட்டா மாறியெனில், Y-மாறியின்

$$Y = \frac{X}{1-X}$$

நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்,

$$g_Y(y) = \frac{\overline{|m+n}\ \ y^{m-1}}{\overline{|m}\ \overline{|n}\,(1+y)^{m+n}}, \qquad 0 < y < \infty$$

$$= 0, \qquad \text{மற்றபடி}$$

ஆகும்.

தெரிப்பு

m, n ஆகியவைகளைச் சுட்டுறுப்புகளாகக் கொண்ட **பீட்டா** மாறி X-ன் நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்

$$f_x(x) = \frac{\overline{|(m+n)}}{\overline{|m}\;\overline{|n}} \quad x^{m+1} \cdot (1-x)^{n+1}, \; 0 < x < 1$$

$$= \quad 0, \qquad \text{மற்றபடி}$$

ஆகும்.

இப்போது, Y-மாறியை

$$Y = \frac{X}{1-X}$$

என்று எடுத்துக் கொள்ளும்போது, X-மாறியின் வெளி $A = \{ x: 0 < x < 1 \}$ க்கு இணையாக உருவாகும் Y-மாறியின் வெளி $A = \{ Y: 0 < y < \infty \}$ ஆகும். Y-மாறியின் பரவல் சார்பு

$$G_y(y) = P_r\,(Y \leq y)$$

$$= P_r\left(\frac{X}{1-X} \leq y\right)$$

$$= P_r\left(X \leq \frac{y}{1+y}\right)$$

$$= \int_0^{\frac{y}{1+y}} f_x(x) \cdot dx$$

$$= \int_0^{\frac{y}{1+y}} \frac{\overline{|(m+n)}}{\overline{|m}\;\overline{|n}} \cdot x^{m-1}\,(1-x)^{n-1} \cdot dx$$

ஆகும்.

எனவே, Y மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$$g_y(y) = \frac{d}{dy}\,[\,G_y(y)\,]$$

$$= \frac{\overline{|m+n}}{\overline{|m}\;\overline{|n}} \left(\frac{y}{1+y}\right)^{m-1} \left(1 - \frac{y}{1+y}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{1+y}\right)^2$$

$$= \frac{\overline{|m+n}}{\overline{|m}\;\overline{|n}} \; \frac{y^{m-1}}{(1+y)^{m+n}}, \quad 0 < y < \infty$$

$$= 0, \; \text{மற்றபடி}$$

ஆகும்.

இந்த அடர்த்திச் சார்பு, m, n ஆகியவைகளைச் சுட்டுறுப்புகளாகக் கொண்ட பீட்டா மாறியின் பிறிதொரு வடிவம் என்கிறோம்.

m, n ஆகிய சுட்டுறுப்புகளைக் கொண்ட பீட்டா ராண்டம் மாறி X-ன் மதிப்பு நிலையெண் a-க்குக் குறைவாக அமைவதற்கான நிகழ்தகவு

$$P_r(X < a) = \int_0^a \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\,\Gamma(n)} x^{m-1}(1-x)^{n-1} \cdot dx$$

$$= \frac{\int_0^a x^{m-1}(1-x)^{n-1} \cdot dx}{\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} \cdot dx}$$

ஆகும். வலது புறம் அமைந்துள்ள தொகைகளின் விகிதத்தை முழுமை பெருத பீட்டா சார்பு (Incomplete Beta Function) என அழைக்கிறோம்.

இயல்நிலைப் பரவல் (Normal Distribution)

'a' ஒரு மெய்யெண் எனவும், 'b' ஒரு மிகை மெய்யெண் எனவும் கொள்வோம். ராண்டம் மாறி X-ன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு,

$$f_X(x) = \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}}, \quad -\infty < x < \infty$$

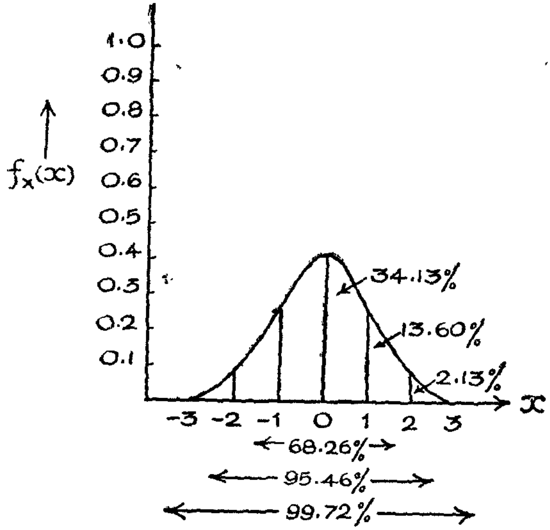
எனில், X மாறியை a, b ஆகியவைகளைச் சுட்டுறுப்புகளாகக் கொண்ட இயல் நிலை மாறி எனவும், மாறியின் பரவலை இயல் நிலைப் பரவல் என்றும் அழைக்கிறோம்.

a, b ஆகிய சுட்டுறுப்புகளைக் கொண்ட இயல் நிலைப் பரவலில் $a = 0$, $b = 1$ எனக் கொள்ளும்போது, நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

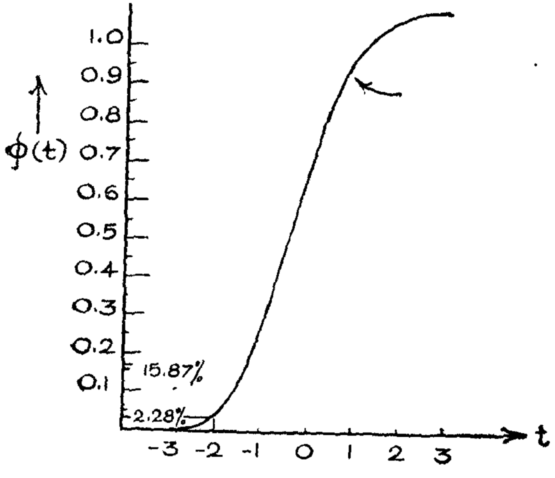
$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad -\infty < x < \infty$$

ஆகும்.

இதை **திட்ட இயல் நிலைப் பரவல்** (Standard Normal Distribution) என அழைக்கிறோம். $a = 0$, $b = 1$ ஆகிய சுட்டுறுப்பு மதிப்புக்களைப் பெறும் இயல் நிலை மாறியைத் திட்ட இயல் நிலை மாறி என அழைக்கிறோம்.



படம் *3.12* (a)
திட்ட இயல்நிலை அடர்த்திப் பரவல்



படம் *3.12* (b)
திட்ட இயல்நிலைப் பரவல் சார்பு

திட்ட இயல் நிலை மாறி X-ஆனது, பல்வேறு மதிப்புக்களை ஏற்றுக் கொள்ளும்போது, அவைகளுக்கு இணையான அடர்த்திச் சார்பு y-ன்

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

மதிப்புகளும், பரவல் சார்பு, $\phi(t)$-ன்

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \cdot dx$$

மதிப்புகளும், பிஷர்-யேட்ஸ், பையோ மெட்ரிகா ஆகிய புள்ளியியல் பட்டியல் புத்தகங்களில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

a, b ஆகியவைகளைச் சுட்டுறுப்புகளாகக் கொண்ட இயல் நிலைமாறி X-ன் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு

$$M(t) = E(e^{tx})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} e^{tx} e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}} \cdot dx$$

$$= e^{-\frac{a^2}{2b^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2b^2}[x^2-2(a+b^2t)x]}$$

$$= e^{-\frac{a^2}{2b^2}+\frac{(a+b^2t)^2}{2b^2}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2b^2}[x-(a+b^2t)]^2} \cdot dx$$

$$= e^{-at+b^2t^2/2}, \quad -\infty < t < \infty$$

ஆகும்.

இப்போது, $$E(X) = \left[\frac{d}{dt} M(t)\right]_{t=0}$$

$$= \left[e^{at+\frac{b^2t^2}{2}} \cdot (a+b^2t)\right]_{t=0}$$

$$= a$$

$$E(X^2) = \left[e^{at + \frac{b^2 t^2}{2}} \cdot (a+b^2t)^2 + e^{at + \frac{b^2 t^2}{2}} \cdot b^2 \right]_{t=0}$$

$$= a^2 + b^2$$

$$\therefore \quad \sigma_X^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

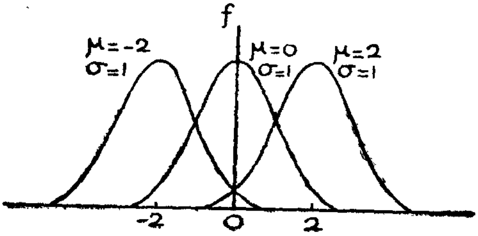
$$= b^2$$

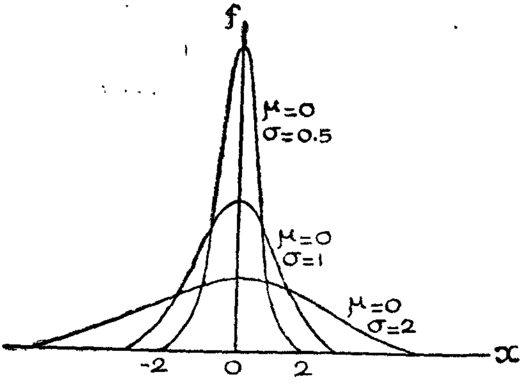
எனவே, X மாறியின் சராசரி a ஆகவும், மாறுபாடு b^2 ஆகவும் அமைகின்றன.

இயல்நிலை மாறியின் சராசரியை 'μ' எனவும், மாறுபாட்டை 'σ^2' எனவும் குறிப்பிடும்போது, இயல்நிலைப் பரவல் சார்பு

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \; e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \; -\infty < x < \infty$$

ஆக அமைகிறது. இதை $N(\mu, \sigma^2)$ எனக் குறியீட்டால் குறிப்போம்.





படம் 3.12 (c)
இயல்நிலை அடர்த்திப் பரவல்கள்

X-ஆனது இயல் நிலைமாறி $N(\mu, \sigma^2)$ எனில், X-ன் நடுவிலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு

$$M(t) = E\left(e^{t(X-\mu)}\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{t(x-\mu)} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(\mu-x)^2}{2\sigma^2}} \cdot dx$$

$$= e^{\sigma^2 t^2/2}$$

ஆகும்.

இதைப் படித் தொடராக எழுதும்போது,

$$M(t) = e^{t^2\sigma^2/2}$$

$$= 1 + \left(\frac{t^2\sigma^2}{2}\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{t^2\sigma^2}{2}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{r!}\left(\frac{t^2\sigma^2}{2}\right)^r + \cdots$$

ஆகும்.

இந்தப் படித்தொடரில், t, t^3, t^5, ... ஆகியவைகளின் கெழுக்கள் பூச்சியமாகும். எனவே, X மாறியின் முதலாவது, மூன்றாவது, ஐந்தாவது, ... நடுவிலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் பூச்சியமாகின்றன.

அதாவது, μ_{2k+1} = $M(t)$-ன் படித்தொடரில் t^{2k+1}-ன் கெழு, $k = 0, 1, 2, \ldots$

$= 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$

ஆக அமைகின்றன.

அடுத்து, X மாறியின் $(2k)$-வது, $k = 1, 2, 3, 4, \ldots$ நடுவிலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள்,

μ_{2k} = $M(t)$ ன் படித்தொடரில் t^{2k}-ன் கெழு

$$= \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^k \cdot \frac{(2k)!}{k!}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

ஆகின்றன.

தேற்றம்

a ஒரு மிகையெண் எனவும், c ஒரு மெய்யெண் எனவும், X மாறி ஓர் இயல்நிலை மாறி $N(\mu, \sigma^2)$ எனவும் கொண்டால்,

$$Z = \left(\frac{x-c}{a}\right) \text{ மாறியானது,}$$

$$\text{சராசரி} = \frac{\mu - c}{a}, \quad \text{மாறுபாடு } \frac{\sigma^2}{a^2} \text{ ஆகியவைகளைக்}$$

கொண்ட இயல்நிலை மாறியாகும்.

தெரிப்பு

இயல்நிலை $N(\mu, \sigma^2)$ மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு,

$$f_x(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

ஆகும்.

இப்போது, $Z = \left(\frac{x-c}{a}\right)$ மாறியின் பரவல் சார்பு,

$$\begin{aligned} G_z(u) &= P_r(Z \leq u) \\ &= P_r\left(\frac{x-c}{a} \leq u\right) \\ &= P_r(x \leq c + au) \\ &= \int_{-\infty}^{c+du} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot dx \end{aligned}$$

ஆகும்.

Z-மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு,

$$\begin{aligned} g_z(u) &= \frac{d}{du}[G_z(u)] \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(c+au-\mu)^2}{2\sigma^2}} \\ &= \frac{1}{(\sigma/d)\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d^2}{2\sigma^2}\left[u - \left(\frac{\mu-c}{a}\right)\right]^2}, \end{aligned}$$

$$-\infty < u < \infty$$

ஆகும். எனவே z மாறியானது, சராசரி $\frac{\mu - c}{a}$ மாறுபாடு

$\frac{\sigma^2}{a^2}$ ஆகியவைகளைக் கொண்ட இயல்நிலை மாறியாகும்.

துணைத் தேற்றம்

ஓர் இயல்நிலை மாறி X-ன் சராசரி μ, திட்ட விலக்கம் 'σ' எனில், $\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ மாறியானது திட்ட இயல்நிலை மாறியாகும்.

தெரிப்பு

மேலே நிறுவப்பட்ட தேற்றத்தில் $c = \mu$, $a = \sigma$ எனக் கொள்ளும்போது,

$$Z = \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \text{ ஆகவும்,}$$

$$\text{அதன் சராசரி} = \frac{\mu - c}{a} = \frac{\mu-\mu}{a} = 0 \text{ ஆகவும்,}$$

$$\text{மாறுபாடு} = \frac{\sigma^2}{a^2} = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1 \text{ ஆகவும் பெறுகிறோம்.}$$

எனவே, $\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ மாறியானது திட்ட இயல்நிலை மாறியாகும்.

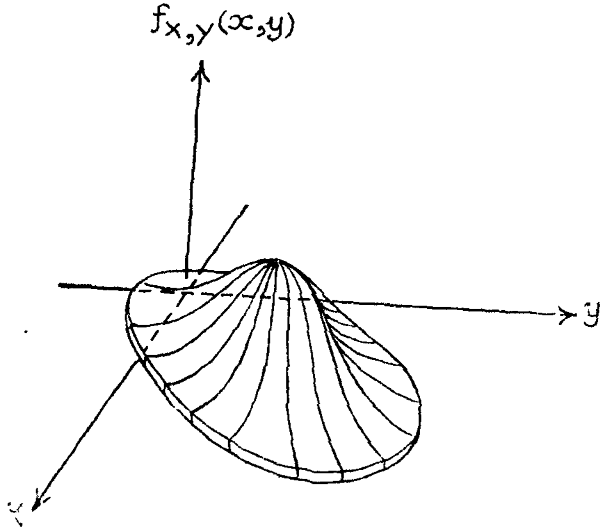
இருமாறி இயல்நிலைப் பரவல் (Bivariate Normal Distribution)

μ_1, μ_2 ஆகியன மெய்யெண்கள் எனவும், σ_1, σ_2, ρ ஆகிய மெய்யெண்கள் $\sigma_1 > 0$; $\sigma_2 > 0$, $-1 < \rho < 1$ ஆகிய நிபந்தனைகளுக்குட்பட்டுள்ளன எனவும் கொள்வோம். ரண்டும் மாறிகள் X, Y ஆகியவைகளின் இணைந்த நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi\, \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]}$$

$$-\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty$$

எனில் X, Y ஆகியவைகளின் இணைந்த பரவலை இருமாறி இயல்நிலைப் பரவல் என அழைக்கிறோம். $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ ஆகியவைகளை இருமாறி இயல்நிலைப் பரவலின் சுட்டுறுப்புக்கள் என வழங்குகிறோம்.



படம் 3.13
இருமாறி இயல்நிலைப் பரவல்

தேற்றம்

X, Y ஆகிய மாறிகளின் இணைந்த பரவல் $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ ஆகியவைகளைக்கொண்ட இருமாறி இயல்நிலைப் பரவல் எனில்,

(i) *X* மாறியின் இறுதிநிலைப் பரவலானது, சராசரி μ_1, மாறுபாடு σ_1^2 ஆகியவைகளைக் கொண்ட இயல்நிலைப் பரவலாகவும்,

(ii) *Y* மாறியின் இறுதிநிலைப் பரவலானது, சராசரி μ_2, மாறுபாடு σ_2^2 ஆகியவைகளைக் கொண்ட இயல்நிலைப் பரவலாகவும்,

(iii) *X* மாறி ஏற்றுக்கொள்ளும் மதிப்பு *x* எனக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்போது, *Y* மாறியின் நிபந்தனை நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவலானது சராசரி $\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)$ மாறுபாடு $\sigma_2^2(1-\rho^2)$ ஆகியவைகளைக் கொண்ட இயல் நிலைப் பரவலாகவும்,

(iv) *Y* மாறி ஏற்றுக்கொள்ளும் மதிப்பு *y* எனக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்போது, *X* மாறியின் நிபந்தனை நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவலானது

சராசரி $\mu_1 + \rho \dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2)$, மாறுபாடு $\sigma_1^2(1-\rho^2)$

ஆகியவைகளைக் கொண்ட இயல்நிலைப் பரவலாகவும்,

(v) X, Y ஆகிய இணைந்த இயல்நிலை மாறிகளின் ஒட்டுறவுக் கெழு ρ ஆகவும்,

(vi) X, Y மாறிகளின் இணைந்த விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு

$M_{xy}(t_1, t_2) = exp\{(t_1\mu_1 + t_2\mu_2) + \frac{1}{2}(t_1^2\sigma_1^2 + \rho\, t_1 t_2\,\sigma_1\sigma_2 + t_2^2\sigma_2^2)\}$
ஆகவும் அமைகின்றன.

தெரிப்பு

(i) X, Y ஆகிய மாறிகளின் பரவலானது $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ ஆகியவைகளைச் சுட்டுறுப்புகளாகக் கொண்ட இருமாறி இயல்நிலைப் பரவல் எனில், X, Y மாறிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு,

$$f_{xy}(x, y) = \frac{1}{2\pi\,\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\; e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]}$$

$$-\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty$$

ஆகும்.

X மாறியின் இறுதிநிலைச் சார்பு

$$g_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y)\cdot dy$$

$$= \frac{e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2(1-\rho^2)\sigma_1^2}}}{2\pi\,\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\right]} dy$$

$$= \frac{e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2(1-\rho^2)\sigma_1^2} + \frac{\rho^2(x-\mu_1)^2}{2(1-\rho^2)\sigma_1^2}}}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)}\left[(y-\mu_2) - \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)\right]^2}}{\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\sqrt{2\pi}}\, dv$$

$$= \frac{e^{\frac{-(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}$$

$$\because \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)}\left[(y-\mu_2) - \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)\right]^2} dy}{\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\sqrt{2\pi}} = 1$$

ஆகும்.

எனவே, X மாறியின் இறுதிநிலைப் பரவலானது சராசரி μ_1, மாறுபாடு σ_1^2 ஆகியவைகளைக் கொண்ட இயல்நிலைப் பரவலாகும்.

(ii) பகுதி (i) ல் கையாண்ட வழியைப் பின்பற்றி, Y மாறியின் இறுதிநிலைப் பரவலானது சராசரி μ_2, மாறுபாடு σ_2^2 ஆகியவைகளைக் கொண்ட இயல்நிலைப் பரவலாகும் எனப் பெறுகிறோம்.

(iii) X மாறி ஏற்றுக்கொள்ளும் மதிப்பு x எனக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்போது, Y மாறியின் நிகழ்தகவுச் சார்பு

$$f_{Y/X}(y/x) = \frac{f_{XY}(x, y)}{g_X(x)}$$

ஆகும். இங்கு $g_X(x)$ ஆனது X மாறியின் இறுதிநிலைப் பரவலைக் குறிக்கிறது.

இப்போது

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\}$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1} exp \left\{ - \frac{1}{2\sigma_1^2} (x - \mu_1)^2 \right\} \right]$$

$$\times \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2 \sqrt{1-\rho^2}} exp \left\{ - \frac{1}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)} \right.\right.$$

$$\left.\left. [(y - \mu_2) - \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (x - \mu_1)] \right\} \right]$$

ஆகவும்,

$$g_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1} exp \left\{ - \frac{1}{2\sigma_1^2} (x - \mu_1)^2 \right\}$$

ஆகவும் அமைவதால்,

$$f_{Y/X}(y/x) = \frac{f_{XY}(x, y)}{g_X(x)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2}} exp \left\{ - \frac{1}{2\sigma_2^2(1 - \rho^2)} [(y - \mu_2) - \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (x - \mu_1)]^2 \right\}$$

எனவே, $(X = x)$ எனக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்போது, Y மாறியின் நிபந்தனை நிகழ்தகவுப் பரவலானது, சராசரி $\mu_2 + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - \mu_1)$, மாறுபாடு $\sigma_2^2(1-\rho^2)$ ஆகியவைகளைக் கொண்ட இயல்நிலைப் பரவலாகும் எனப் பெறுகிறோம்.

(iv) பகுதி (iii)ல் கையாண்ட வழியைப் பின்பற்றி $(Y = y)$, எனக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்போது, X மாறியின் நிபந்தனை நிகழ்தகவுப் பரவலானது சராசரி

$$\mu_1 + \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y - \mu_2), \text{ மாறுபாடு } \sigma_1^2(1 - \rho^2)$$

ஆகியவைகளைக் கொண்ட இயல்நிலைப் பரவலாகும் எனப் பெறுகிறோம்.

(v) X, Y ஆகிய இணைமாறிகளின் ஒட்டுறவுக்கெழு

$$\frac{E\{(X - E(X))(Y - E(Y))\}}{\sqrt{\{E(X - E(X))^2\}\{E(Y - E(Y))^2\}}}$$

என வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.

இப்போது, X, Y ஆகியன $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho$ ஆகியவைகளைச் சுட்டுறுப்புகளாகக் கொண்ட இருமாறி இயல்நிலைப் பரவல் என அமைவதால், X-ன் இறுதிநிலைப் பரவல்,

$$g_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$

எனவும், Y-ன் இறுதிநிலைப் பரவல்

$$h_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2} \cdot e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

எனவும் பெறுகிறோம்.

ஆதலால் $E(X) = \mu_1, \{E(X-E(X))^2\}^{\frac{1}{2}} = \sigma_1$

$$E(Y) = \mu_2, \{E(Y-E(Y))^2\}^{\frac{1}{2}} = \sigma_2$$

ஆக அமைகின்றன.

இப்போது

$$\frac{E\{(X-E(X))(Y-E(Y))\}}{\sqrt{\{E(X-E(X))^2\}\{E(Y-E(Y))^2\}}} = \left\{E\left(\frac{X-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{Y-\mu_2}{\sigma_2}\right)\right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right) f_{XY}(x,y)\cdot dx\cdot dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi\,\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right) e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}}$$

$$\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]$$

$$dx\cdot dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi(1-\rho^2)}\, uve^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(u^2-2\rho uv+v^2)}\, du\cdot dv$$

இங்கு $u = \frac{x-\mu_1}{\sigma_1}$; $v = \frac{y-\mu_2}{\sigma_2}$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{u}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{v}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}}\right.$$

$$\left. e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(v-\rho u)^2}\right\} du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \rho u \frac{e^{-\frac{(v-\rho u)^2}{2(1-\rho^2)}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} dv + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(v-\rho u)}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(v-\rho u)^2}{2(1-\rho^2)}} dv \right\} du$$

$$= \int_{\infty}^{\infty} \frac{u}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \{ \rho u + 0 \} du$$

$$= \rho \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du = \rho \text{ ஆகும்.}$$

எனவே, (X, Y) ஆகிய இணைந்த இயல்நிலை மாறிகளின் ஒட்டுறவுக் கெழு ρ எனப் பெறுகிறோம்.

(vi) X, Y ஆகியன இருமாறி இயல்நிலைப் பரவலின் இணைந்த விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு

$$M_{xy}(t_1, t_2) = E\{e^{t_1 x + t_2 y}\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{t_1 x + t_2 y} f_{xy}(x, y)\, dx \cdot dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{t_1 x + t_2 y} \frac{e^{-\frac{1}{2}Q}}{2\pi \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1-\rho_2}} dx \cdot dy$$

இங்கு $Q = \frac{1}{(1-\rho^2)} \left\{ \left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho \left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 \right\}$

$$= e^{t_1\mu_1 + t_2\mu_2} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{t_1(x-\mu_1) + t_2(y-\mu_2)} \frac{e^{-\frac{1}{2}Q}}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} dx\, dy$$

$$= \frac{e^{t_1 \mu_1 + t_2 \mu_2}}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{t_1\sigma_1 \mu_1 + t_2\sigma_2 \mu_2}$$

$$e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[u_1^2 - 2\rho u_1 u_2 + u_2^2]} du_1 du_2$$

இங்கு $u_1 = \frac{x-\mu_1}{\sigma_1}$, $u_2 = \frac{y-\mu_2}{\sigma_2}$

$$= e^{t_1 \mu_1 + t_2 \mu_2} \int_{\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}H} du_1 du_2$$

இங்கு

$$H = u_1^2 - 2\rho u_1 u_2 + u_2^2 - 2(1-\rho^2)(t_1\sigma_1 u_1 + t_2\sigma_2 u_2)$$
$$= \{u_2 - \rho u_1 - (1-\rho^2) t_2\sigma_2\}^2 + (1-\rho^2)\{u_1 - \rho t_2\sigma_2 - t_1\sigma_1\}^2$$
$$-(1-\rho^2)(t_1^2\sigma_1^2 + 2\rho t_1 t_2 \sigma_1\sigma_2 + t_2^2\sigma_2^2)$$

ஆகும்.

இப்போது கீழ்க்கண்ட தொகையில்

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}H} du_1 \cdot du_2$$

முதலில் u_1 நிலையெண் எனக்கொண்டு u_2 குறித்துத் தொகை செய்து, அடுத்து u_1 குறித்துத் தொகை செய்வோமெனில்,

$$e^{\frac{1}{2}(t_1^2\sigma_1^2 + 2\rho t_1 t_2\sigma_1\sigma_2 + t_2^2\sigma_2^2)}$$

எனப் பெறுகிறோம். எனவே,

$$M_{xy}(t_1, t_2) = e^{t_1\mu_1 + t_2\mu_2 + \frac{1}{2}(t_1^2\sigma_1^2 + 2\rho t_1 t_2\sigma_1\sigma_2 + t_2^2\sigma_2^2)}$$

ஆகும்.

தேற்றம்

X, Y ஆகிய இருமாறி இயல்நிலைப் பரவலில் X, Y மாறிகளின் சராசரிகள் முறையே μ_1, μ_2 எனவும், மாறுபாடுகள் முறையே σ_1^2, σ_2^2 எனவும், ஒட்டுறவுக்கெழு ρ எனவும் கொள்வோம். அப்போது X, Y மாறிகளின் ஒட்டுறவுக்கெழு ρ ஆனது பூச்சிய மதிப்பை ஏற்றுக்கொள்ளுமெனில் அவைகள் சார்பற்ற மாறிகளா

கவும் மறுதலையாக X, Y மாறிகள் சார்பற்றதெனில், அவைகளின் ஒட்டுறவுக்கெழு பூச்சியமாகவும் அமைகிறது.

தெரிப்பு

X, Y ஆகிய இருமாறி இயல்நிலைப் பரவலில் X, Y மாறிகளின் சராசரிகள் முறையே μ_1, μ_2 எனவும், மாறுபாடுகள் முறையே σ_1^2, σ_2^2 எனவும், ஒட்டுறவுக்கெழு ρ எனவும் கொள்ளும்போது பரவலின் விலக்கப் பெருக்கத்தொகை உருவாக்கும் சார்பு

$$M_{xy}(t_1, t_2) = \exp\{t_1\mu_1 + t_2\mu_2 + \tfrac{1}{2}(t_1^2\sigma_1^2 + 2\rho t_1 t_2\sigma_1\sigma_2 + t_2^2\sigma_2^2)\}$$

ஆகும்.

X மாறியின் இறுதிநிலைப் பரவலின் விலக்கப் பெருக்கத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு

$$M_{xy}(t_1, 0) = \exp(t_1\mu_1 + \tfrac{1}{2}t_1^2\sigma_1^2)$$

Y மாறியின் இறுதிநிலைப் பரவலின் விலக்கப் பெருக்கத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு

$$M_{xy}(0, t_2) = \exp\{t_2\mu_2 + \tfrac{1}{2}t_2^2\sigma_2^2\}$$

ஆக அமைகின்றன.

இப்போது X, Y ஆகிய மாறிகளின் ஒட்டுறவுக்கெழு ρ ஆனது பூச்சிய மதிப்பை ஏற்றுக்கொள்ளுமெனில்,

$$\begin{aligned} M_{xy}(t_1, t_2) &= \exp\{t_1\mu_1 + t_2\mu_2 + \tfrac{1}{2}(t_1^2\sigma_1 + t_2^2\sigma_2^2)\} \\ &= M_{xy}(t_1, 0)\, M_{xy}(0, t_2) \end{aligned}$$

ஆகிறது. எனவே, X, Y ஆகிய மாறிகள் சார்பற்றன எனப் பெறுகிறோம்.

இப்போது X, Y ஆகிய இணைந்த இயல்நிலை மாறிகள் சார்பற்றனவெனில்,

$$M_{xy}(t_1, t_2) = M_{xy}(t_1, 0)\, M_{xy}(0, t_2)$$

ஆக அமையவேண்டும். அதாவது,

$$e^{\rho t_1 t_2 \sigma_1 \sigma_2} = 1$$

ஆக அமையவேண்டும். $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$ ஆக அமைவதால்

$e^{\rho t_1 t_2 \sigma_1 \sigma_2} = 1$ எனில், $\rho = 0$ என அமையவேண்டும்.

அதாவது X, Y மாறிகளின் ஒட்டுறவுக்கெழு பூச்சியமாகும் எனப் பெறுகிறோம்.

4. கூறு பரவல்கள்

(Sampling Distributions)

வரையறை

ஒன்று அல்லது பல ராண்டம் மாறிகளின் சார்பு, மதிப்புத் தெரியாத எந்தவொரு சுட்டுறுப்பையும் சார்ந்திராமல் அமையின் அச் சார்பைக் **கூறு அளவை** (Statistic) என வரையறை செய்கிறோம்.

X ஒரு ராண்டம் மாறி எனில் X^2, e^x, $4X + 9$ ஆகிய சார்புகள் கூறு அளவைகளாகின்றன.

Y மாறியின் பரவல், திட்ட இயல்நிலை $N(\mu, \sigma^2)$ பரவல் எனில்,

$$g(Y) = \frac{Y-\mu}{\sigma}, \qquad h(Y) = \frac{Y^2}{\sigma^2}$$

ஆகிய சார்புகள் μ, σ^2 ஆகிய சுட்டுறுப்புகளைச் சார்ந்துள்ளன. சுட்டுறுப்புகளின் மதிப்புகள் தெரியுமெனில், அவைகளைக் கூறு அளவைகள் என அழைக்கிறோம்.

$Z_1, Z_2, \ldots\ldots, Z_m$ ஆகியன m ராண்டம் மாறிகள் எனில்,

$$\sum_{i=1}^{m} Z_i \ , \quad \prod_{i=1}^{m} Z_i \ , \quad \sum_{i=1}^{m} Z_i^2 \ , \quad \frac{Z_m}{Z_1}$$

ஆகியவைகள் கூறு அளவைகளாகின்றன.

வரையறை

ஒரு ராண்டம் மாறி X-ன் பரவல் சார்பு $F_X(x)$ என்க. $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ ஆகிய n சார்பற்ற ராண்டம் மாறிகள் ஒவ்வொன்றின் பரவல் சார்பும் X-ன் பரவல் சார்பாகவே

$$F_{X_i}(x) = F_X(x)\ , \quad i = 1, 2, 3, \ldots\ldots, n$$

அமையின் இம் மாறிகளை X பரவலிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட **சம வாய்ப்புக் கூறு** என அழைக்கிறோம்.

இப்போது $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ ஆகியன ஒரு சமவாய்ப்புக் கூறு எனில் அவைகளின் கூறு அளவைகளான கூறு சராசரி, கூறு மாறுபாடு, கூறு திட்டவிலக்கம், கூறு Kஆவது நடுவிலக்கப் பெருக்குத்தொகை, கூறுவீச்சு ஆகியவைகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு வழங்குகிறோம்.

கூறு சராசரி : $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

கூறு மாறுபாடு : $S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$

கூறு திட்டவிலக்கம் : $S = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}$

கூறு Kஆவது நடுவிலக்கப் பெருக்குத்தொகை : $M_K = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^K$

$K = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots$

கூறுவீச்சு : $R = (X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n)$ ஆகியவைகளின் மீப்பெருமம் $- (X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots, X_n)$ ஆகியவைகளின் மீச்சிறுமம்.

வரையறை

கூறு அளவையானது ஒன்று அல்லது பல ராண்டம் மாறிகளின் சார்பாக அமைவதால் அதுவும் ஒரு ராண்டம் மாறியாகும். எனவே, கூறு அளவையைக் குறிப்பிடும்போது அதன் நிகழ்தகவுப் பரவலை இணைத்துக் குறிப்பிடுவதாகிறது. கூறு அளவையின் நிகழ்தகவுப் பரவலைக் **கூறுபரவல்** (Sampling distribution) என வழங்குகிறோம்.

கூறு அளவைகளும் அளவைகளின் கூறு பரவல்களும் புள்ளியியல் உய்த்துணர் முறைகளின் உயிர்நாடிகளாக அமைந்துள்ளன. இப்போது கூறுபரவல்களைப் பெறுவதற்கான வழிமுறைகள் சிலவற்றைப் பற்றிக் காண்போம்.

பரவல் சார்பு முறை (Distribution Function Method)

$X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots, X_n$ ஆகியன ராண்டம் மாறிகள் எனவும், அவைகளின் இணைந்த நிகழ்தகவுப் பரவல் $f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ எனவும், $\phi = \phi(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n)$ ஆனது ஒரு கூறு அளவை

எனவும் கொள்வோம். இப்போது கூறு அளவை ϕ-ன் பரவல் சார்பு

$$F_{\phi}(y) = \text{Prob}(\phi \le y)$$

$$= \sum_{\substack{x_1, x_2, \dots, x_n \\ \phi \le y}} f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x_1, x_2, \dots, x_n \text{ ஆகியன தனித்த மாறிகளெனில்.}$$

$$= \int_{\phi \le y} \dots \int f(x_1, x_2, \dots\dots, x_n)\, dx_1 \cdot dx_2 \dots\dots dx_n, \quad x_1, x_2, \dots\dots, x_n \text{ ஆகியன தொடர்ச்சியான மாறிகளெனில்,}$$

ஆகும்.

கணக்கு

X_1, X_2, X_3 ஆகியன திட்ட இயல்நிலைப் பரவலிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட சமவாய்ப்புக் கூறு எனில், கூறு அளவை $Y = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$-ன் நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவலைப் பெறுக.

முறை

X_1, X_2, X_3 ஆகியன திட்ட இயல்நிலைப் பரவலிலிருந்து பெற்ற சமவாய்ப்புக் கூறு ஆக அமைவதால் அவைகளின் இணைந்த நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்

$$f(x_1\, x_2\, x_3) = f_{X_1}(x_1)\, f_{X_2}(x_2)\, f_{X_3}(x_3)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)} \quad \text{ஆகும்.}$$

கூறு அளவை $Y = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$-ன் பரவல் சார்பு

$$G_Y(y) = \text{Prob}(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 \le y)$$

$y < 0$ எனில், $G_Y(y) = 0$ ஆக அமைகிறது.

$y \ge 0$ எனில்,

$$G_Y(y) = \iiint_A \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}\, dx_1 \cdot dx_2 \cdot dx_3$$

இங்கு $A = \{(x_1, x_2, x_3) : -\infty < x_1 < \infty, -\infty < x_2 < \infty, -\infty < x_3 < \infty, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le y\}$

ஆகும்.

இப்போது,

$$x_1 = \sqrt{r}\cos\theta\sin\phi$$
$$x_2 = \sqrt{r}\sin\theta\sin\phi$$
$$x_3 = \sqrt{r}\cos\phi$$
$$r \geq 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 \leq \phi \leq \pi$$

என எடுத்துக்கொள்ளும்போது y-ன் பரவல் சார்பு

$$G_Y(y) = \int_0^y \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 e^{-\frac{r}{2}} \sqrt{r}\sin\phi \cdot d\phi \cdot d\theta \cdot dr$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^y \sqrt{r}\, e^{-\frac{r}{2}}\, dr, \qquad y \geq 0$$

y-ன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $g_Y(y)$

$$g_Y(y) = \frac{d}{dy}[G_Y(y)]$$

$$= \frac{d}{dy}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^y e^{-\frac{r}{2}} \sqrt{r} \cdot dr\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{1}{2}}, \qquad y \geq 0$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}\,\Gamma\!\left(\frac{3}{2}\right)} e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{3}{2}-1}, \qquad y \geq 0$$

ஆகும். எனவே, Y-ன் கூறுபரவல் சுட்டுறுப்புகள் $\alpha = \frac{1}{2}$, $p = \frac{3}{2}$ ஆகியவைகளைக்கொண்ட காமா பரவலாக அமைகிறது.

கணக்கு

ஒரு ராண்டம் மாறி Y-ன் நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்

$$f(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y \geq 0 \\ 0, & \text{மற்றபடி} \end{cases}$$

என்க.

Y_1, Y_2 ஆகியன Y மாறியின் பரவலிலிருந்து பெற்ற சமவாய்ப்புக் கூறு எனில், $Z = (Y_1 + Y_2)$-ன் கூறுபரவலைப் பெறுக.

முறை

Y பரவலிலிருந்து பெற்ற சமவாய்ப்புக்கூறு மாறிகள் Y_1, Y_2 ஆகியவைகளின் இணைந்த பரவல்

$$f_{Y_1 Y_2}(y_1\, y_2) = f_{Y_1}(y_1)\, f_{Y_2}(y_2) \qquad \because\ Y_1, Y_2 \text{ ஆகியன சார்பற்ற மாறிகள்.}$$

$$= \begin{cases} e^{-(y_1 + y_2)}, & y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0 \\ 0\ , & \text{மற்றபடி} \end{cases}$$

ஆகும்.

இப்போது கூறு அளவை $Z = (Y_1 + Y_2)$-ன் பரவல் சார்பு $G_z(x)$.

$$G_z(x) = \text{Prob}\,(Z \leq x) = \text{Prob}\,(Y_1 + Y_2 \leq x)$$

$$= \underset{\substack{y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0 \\ y_1 + y_2 \leq x}}{\int\int} e^{-(y_1 + y_2)} \cdot dy_1 \cdot dy_2$$

$$= \begin{cases} 0\ , & x < 0 \\ \underset{\substack{y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0 \\ y_1 + y_2 \leq x}}{\int\int} e^{-(y_1 + y_2)} \cdot dy_1 \cdot dy_2, & x \geq 0 \end{cases}$$

இப்போது $\underset{\substack{y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0 \\ y_1 + y_2 \leq x}}{\int\int} e^{-(y_1 + y_2)}\, dy_1 \cdot dy_2$

$$= \int_{y_1=0}^{x} e^{-y_1} \left[\int_{y_2=0}^{x-y_1} e^{-y_2} \cdot dy_2 \right] dy_1$$

$$= \int_{y_1=0}^{x} e^{-y_1} \left[1 - e^{-(x-y_1)} \right] dy_1$$

$$= \left(1 - e^{-x}\right) - xe^{-x}$$

$$\therefore \; G_z(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-x} - xe^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

ஆகும்.

Z-ன் நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்

$$g_z(x) = \frac{d}{dx}\left[G_z(x)\right]$$

$$= \begin{cases} 0 \quad , & x < 0 \\ xe^{-x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

கணக்கு

ξ மாறியின் பரவலானது (0, 1) இடைவெளியில் வரையறுக்கப்பட்டுள்ள சீரான பரவல் எனவும், X, Y ஆகிய மாறிகள் ξ-பரவலிலிருந்து பெற்ற சமவாய்ப்புக்கூறு எனவும் கொண்டு $U = XY$ மாறியின் கூறுபரவலை அடைக.

முறை

ξ மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்

$$f_\xi(x) = 1 \quad , \quad 0 < x < 1$$
$$= 0 \quad , \quad \text{மற்றபடி}$$

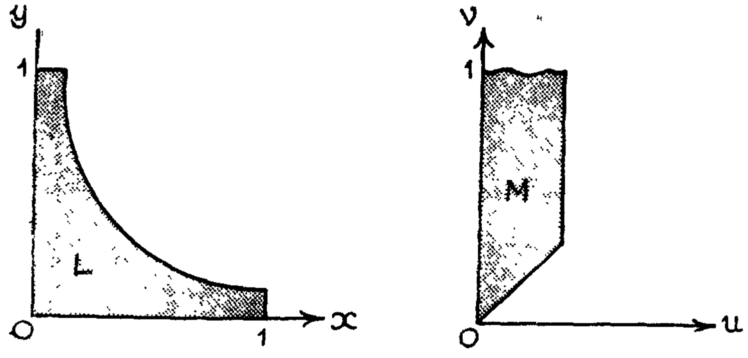
ஆகும்.

இப்போது, $U = XY$ மாறியின் பரவல் சார்பு

$$F_u(t) = P_r(U < u) = P_r(XY < u)$$

$$= \underset{\substack{0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \\ xy < t}}{\int\int} f_{xy}(x, y) \cdot dx \cdot dy$$

$$= \begin{cases} 0 \quad , & t < 0 \\ \displaystyle\int\int_L dx \cdot dy, & t \geq 0, \; L = \left\{ (x, y) : \begin{array}{l} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \\ 0 < xy < t \end{array} \right\} \end{cases}$$



படம் 4.1

இப்போது, $u = xy$, $v = y$ என உருமாற்றத்தைப் பயன்படுத்தும்போது, கணப்பகுதி L-க்கு இணையாகக் கணப்பகுதி

$$M = \{ (u, v) : 0 < u < t,\ 0 < u < v < 1 \}$$ அமைகிறது.

உருமாற்றத்தின் ஜாக்கோபியின் J எனில்

$$\frac{1}{J} = \begin{vmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = y$$ ஆகும்.

எனவே,

$$P_r(u \leq t) = \int\int_L dx \cdot dy = \int\int_M |J| \, du \cdot dv$$

$$= \int\int_M \frac{1}{v} \, du \cdot dv$$

$$= \int_0^t \left[\int_u^1 \frac{1}{v} dv \right] du$$

$$= \int_0^t \log u \cdot du$$

$$= \begin{cases} t[1 - \log t], & 0 < t < 1 \\ 1, & t > 1 \end{cases}$$

ஆகும்.

எனவே, U-மாறியின் பரவல் சார்பு,

$$F_u(t) = 0, \quad t < 0$$
$$= t(1 - \log t), \quad 0 < t < 1$$
$$= 1, \quad t \geq 1$$

ஆகவும்,

நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$$f_u(t) = -\log t, \quad 0 < t < 1$$
$$= 0, \quad \text{மற்றபடி}$$

ஆகவும் அமைகின்றன.

கணக்கு

X, Y ஆகிய இருமாறிகள் கீழ்க்கண்ட பரவலிலிருந்து

$$f(u) = 1, \quad 0 < u < 1$$
$$= 0, \quad \text{மற்றபடி}$$

பெற்ற சமவாய்ப்புக் கூறு எனில்,

$$T = \frac{X}{Y}$$ சார்பின் கூறுபரவலைப் பெறுக.

முறை

(i) மெய்யெண் t ஆனது $0 < t \leq 1$ என அமைவதாகக் கொள்வோம்.

இப்போது $\frac{x}{y} < t$ எனும் அசமன்பாட்டிற்குச் சாதகமான கணப் பகுதி

$$L = \{ (x, y) : 0 < x \leq yt, \quad 0 < y < 1 \}$$

ஆகும். இக் கணப்பகுதியானது படம் 4·2 (a)-ல் கோடிட்ட வெளியாகும்.

$$\text{நிகழ்ச்சி } (T \leq t) = \text{நிகழ்ச்சி} \left(\frac{X}{Y} \leq t \right)$$

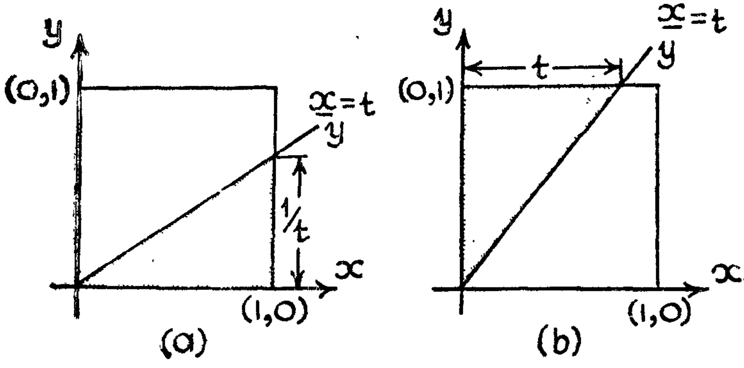
$$= \text{நிகழ்ச்சி } (0 < x < yt, \quad 0 < y < 1)$$

எனவே,

$$P_r(T \leq t) = P_r(0 < x < Yt, \quad 0 < Y < 1)$$

$$= \int_0^1 \int_0^{yt} dx \cdot dy, \quad 0 < t < 1$$

$$= \int_0^1 yt \cdot dy = \frac{t}{2}, \quad 0 < t < 1$$



படம் 4.2 (a), (b)

(ii) மெய்யெண் t ஆனது $t > 1$ என அமைப்பதாகக் கொள்வோம். இப்போது, $\frac{x}{y} > t$ எனும் அசமன்பாட்டிற்குச் சாதகமான கணப்பகுதி

$$M = \left\{ (x, y) : 0 < x < 1,\ 0 < y < \frac{x}{t} \right\}$$

ஆகும். இக் கணப்பகுதியானது படம் 4·2 (b)-ல் கோடிட்ட வெளியாகும்.

$\therefore$ நிகழ்ச்சி $(T > t)$ நிகழ்ச்சி $\left(0 < X < 1,\ 0 < Y < \frac{X}{t}\right)$

எனவே, $P_r(T > t) = P_r\left(0 < X < 1,\ 0 < Y < \frac{X}{t}\right)$

$$= \int_0^1 \int_0^{\frac{x}{t}} dY \cdot dX, \qquad t > 1$$

$$= \int_0^1 \frac{x}{t}\, dX = \frac{1}{2t}, \qquad t > 1$$

ஆகும். ஆதலால்,

$$P_r(T \leq t) = 1 - P_r(T > t) = 1 - \frac{1}{2t}, \quad t > 1$$

இப்போது T மாறியின் பரவல் சார்பு

$$F_T(t) = P_r(T \leq t)$$

$$= \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \dfrac{t}{2}, & 0 < t \leq 1 \\ 1 - \dfrac{1}{2t}, & t > 1 \end{cases}$$

ஆகவும், அதன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 < t \leq 1 \\ \dfrac{1}{t^2}, & t > 1 \\ 0, & \text{மற்றபடி} \end{cases}$$

ஆகவும் அமைகின்றன.

கணக்கு

X மாறியானது இடைவெளி $(0, 1)$-யில் வரையறுக்கப் பட்டுள்ள ஒரு சீரான மாறி யெனில், $Y = \dfrac{1}{X}$ சார்பின் கூறு பரவலைப் பெறுக.

முறை

(i) மெய்யெண் t ஆனது $t < 0$ என அமைவதாகக் கொள்வோம்.

$$P_r(Y < t) = P_r\left(\frac{1}{X} < t\right)$$

X மாறியானது குறையெண் மதிப்புகளைப் பெறுவதற்கான நிகழ் தகவு பூச்சியமாதலால், $\dfrac{1}{X}$ மாறியானது குறையெண் மதிப்புகளைப் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு பூச்சியமாகும்.

$$\therefore \quad P_r(Y < t) = 0, \quad t < 0.$$

(ii) மெய்யெண் t ஆனது $0 < t < 1$ என அமைவதாகக் கொள் வோம்.

$0 < t < 1$ எனில் $\dfrac{1}{t} > 1$ ஆகும்.

$$P_r(Y \leq t) = P_r\left(\frac{1}{X} \leq t\right) = P_r\left(X \geq \frac{1}{t}\right) = 0$$

$$\because \quad \frac{1}{t} > 1.$$

$$\therefore \quad P_r(Y < t) = 0, \quad 0 < t < 1.$$

(iii) மெய்யெண் t ஆனது $t \geq 1$ என அமைவதாகக் கொள்வோம்.

$$t > 1 \text{ எனில் } \frac{1}{t} < 1 \text{ ஆகும்.}$$

$$P_r(Y \leq t) = P_r\left(\frac{1}{X} \leq t\right)$$

$$= P_r\left(X \geq \frac{1}{t}\right)$$

$$= \int_{\frac{1}{t}}^{\infty} f_X(x)\, dx$$

$$= \int_{\frac{1}{t}}^{1} dx \qquad \because \quad F_X(x) = 1 \text{ for } x < 1$$
$$= 0 \text{ for } x > 1$$

$$= 1 - \frac{1}{t}$$

$$\therefore \; P_r(Y \leq t) = 1 - \frac{1}{t}, \quad t > 1.$$

எனவே, Y மாறியின் பரவல் சார்பு

$$F_Y(t) = P_r(Y \leq t)$$

$$= \begin{cases} 0, & t < 1 \\ 1 - \frac{1}{t}, & t \geq 1 \end{cases}$$

ஆகவும், அதன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$$f_y(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ \frac{1}{t^2}, & t \geq 1 \end{cases}$$

ஆகவும் அமைகின்றன.

மாறிகளை மாற்றும் முறை (Change of variables method)

மெய்யெண்களின் கணப்பகுதி A-ல் அடங்கியுள்ள உறுப்பை x எனக் குறிப்போம். $y = \phi(x)$ எனும் சார்பு x-ன் மெய்யான ஒரு மதிப்புடைய சார்பு (real and single valued function) எனவும், கணப்பகுதி B,

$$B = \{ y : y = \phi(x), \; x \in A \}$$

எனவும் கொள்வோம். $y = \phi(x)$ சார்பின் எதிர் மாறுன சார்பு $x = \psi(y)$, y-ன் ஒரு மதிப்புடைய சார்பாக அமையின் $y = \phi(x)$ சார்பை A, B ஆகிய இரு கணப்பகுதிகளின் **ஒன்றுக்கொன்றுன உருமாற்றம்** (one-to-one transformation) என அழைக்கிறோம்.

(i) தனித்த மாறிகளின் உருமாற்றம் (Transformation of discrete variables)

X ஒரு தனித்த ராண்டம் மாறி என்போம். இம் மாறி பூச்சியத்திற்குக் கூடுதலான நிகழ்தகவை ஏற்றுக்கொள்ளும் மெய் யெண்களின் கணப்பகுதி A,

$$A = \{ x \; : \; P_r(X = x) > 0 \}$$

எனக் குறிப்போம்.

இப்போது, $Y = \phi(X)$ எனும் கூறு அளவையை எடுத்துக் கொள்வோம். கணப்பகுதி A-க்கு இணையான கணப்பகுதி B,

$$B = \{ y : \phi(x) = y, \; x \in A \}$$

எனக் குறிக்கும்போது,

$$P_r(Y = y) > 0 \; , \; y \in B$$

ஆகும்.

$y = \phi(x)$ எனும் சார்பு A, B ஆகிய இரு கணப்பகுதிகளின் ஒன்றுக்கொன்றுன உருமாற்றம் எனவும், $y = \phi(x)$-ன் எதிர் மாறுன சார்பு $x = \psi(y)$ எனவும் கொள்வோம். அப்போது Y-ன் நிகழ்தகவுத் திணிவுப் பரவல்,

$$\begin{aligned} g_Y(y) &= P_r(Y = y) \\ &= P_r(X = \psi(y)), \quad \psi(y) \in A \\ &= 0 \; , \quad \text{மற்றபடி} \end{aligned}$$

ஆகும்.

கணக்கு (1)

X மாறியின் நிகழ்தகவுத் திணிவுப் பரவல்

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \tfrac{1}{3} \; , \quad x = 1, 2, 3 \\ &= 0 \; , \quad \text{மற்றபடி} \end{aligned}$$

எனக் கொள்க. X மாறியானது பூச்சியத்திற்குக் கூடுதலான நிகழ்தகவை ஏற்றுக்கொள்ளும் மெய்யெண்களின் கணப்பகுதி A,

$$\begin{aligned} A &= \{ x : P_r(X = x) > 0 \} \\ &= \{ 1, 2, 3 \} \end{aligned}$$

ஆகும்.

இப்போது $Y = 2X + 1$ எனும் கூறு அளவையை எடுத்துக் கொள்வோம்.

கணப்பகுதி A-க்கு இணையான கணப்பகுதி

$$B = \{ y : y = 2x + 1, \quad x \in A \}$$
$$= \{ 3, 5, 7 \}$$

ஆகும். மேலும், $P_r (Y = y) > 0, \quad y \in B$ ஆகும்.

$Y = \phi(y) = 2x + 1$ எனும் சார்பு, A, B ஆகிய இரு கணங்களின் ஒன்றுக்கொன்றான உருமாற்றமாவதால், $y = \phi(x)$-ன் எதிர் மாறான சார்பு, $x = \psi(y) = \frac{y-1}{2}$ ஆகும்.

கூறு அளவை Y-ன் நிகழ்தகவுத் திணிவுச் சார்பு

$$g_Y(y) = \begin{cases} P_r\left(X = \frac{y-1}{2}\right), & y = 3, 5, 7 \\ 0, & \text{மற்றபடி} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{3}, & y = 3, 5, 7 \\ 0, & \text{மற்றபடி} \end{cases}$$

ஆகும்.

கணக்கு (2)

X மாறியின் நிகழ்தகவுத் திணிவுப் பரவல்,

$$f_X(x) = \binom{18}{x} \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{18-x}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, 18$$
$$= 0, \qquad \text{மற்றபடி}$$

என்போம். X மாறியானது பூச்சியத்திற்குக் கூடுதலான நிகழ்தகவை ஏற்றுக்கொள்ளும் மெய்யெண்களின் கணப்பகுதி

$$A = \{ x : f_X(x) > 0 \} = \{ 0, 1, 2, \ldots, 18 \}$$

ஆகும்.

இப்போது $Y = \frac{X-6}{2}$ எனும் கூறு அளவையை எடுத்துக் கொள்வோம். A கணப்பகுதிக்கு இணையான கணப்பகுதி B,

$$B = \left\{ y : y = \frac{x-6}{2},\ x \in A \right\}$$

$$= \left\{ \begin{matrix} -3, & -2\frac{1}{2}, & -2, & -1\frac{1}{2}, & -1, & -\frac{1}{2}, & -0, \\ \frac{1}{2}, & 1\frac{1}{2}, & 2, & 2\frac{1}{2}, & 3, & 3\frac{1}{2}, & 4, \\ 4\frac{1}{2}, & 5, & 5\frac{1}{2}, & 6 \end{matrix} \right\}$$

ஆகும்.

மேலும், $P_r(Y = y) > 0,\ y \in B.$

$y = \phi(x) = \dfrac{x-6}{2}$, சார்பானது A, B ஆகிய இரு கணங்களின் ஒன்றுக்கொன்றான உருமாற்றமாவதால், $y = \phi(x)$-ன் எதிர் மாறான சார்பு $x = \psi(y) = 2y + 6$ ஆகும்.

Y-ன் நிகழ்தகவுத் திணிவுச் சார்பு

$$g_Y(y) = \binom{18}{2y+6}\left(\frac{1}{3}\right)^{2y+6}\left(\frac{2}{3}\right)^{12-2y}, \quad y \in B$$

$$= 0, \qquad \text{மற்றபடி}$$

ஆகும்.

X_1, X_2 ஆகிய இரு தனித்த மாறிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவு பூச்சியத்திற்குக் கூடுதலாக ஏற்றுக்கொள்ளும் புள்ளிகளின் கணப் பகுதி A,

$$A = \{ (x_1 x_2) : f(x_1 x_2) > 0 \}$$

எனக் கொள்வோம். இப்போது

$$Y_1 = \phi_1 (X_1, X_2)$$
$$Y_2 = \phi_2 (X_1, X_2)$$

ஆகியன X_1, X_2 மாறிகளின் சார்புகள் என்போம். Y_1, Y_2 மாறிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவு பூச்சியத்திற்குக் கூடுதலாக ஏற்றுக்கொள்ளும் புள்ளிகளின் கணப்பகுதி B,

$$B = \left\{ \begin{array}{l} (y_1, y_2) : y_1 = \phi_1(x_1, x_2), \\ \qquad\qquad\ \ y_2 = \phi_2(x_1, x_2), \\ \qquad\qquad\ \ (x_1, x_2) \in A \end{array} \right\}$$

ஆகும்.

$y_1 = \phi_1(x_1, x_2)$, $y_2 = \phi_2(x_1, x_2)$ ஆகிய சார்புகள் A, B ஆகிய இரு கணங்களின் ஒன்றுக்கொன்றான உருமாற்றம் எனில், இச் சார்புகளின் எதிர்மாறான சார்புகள் $x_1 = \psi_1(y_1, y_2)$,

$x_2 = \psi_2(y_1, y_2)$ ஆகின்றன என்போம். Y_1, Y_2 மாறிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவுத் திணிவுச் சார்பு,

$$g(y_1, y_2) = f[\psi_1(y_1, y_2), \psi_2(y_1, y_2)], \quad (y_1, y_2) \in B$$
$$= 0, \quad \text{மற்றபடி}$$

ஆகும்.

கணக்கு

X_1, X_2 ஆகிய இரு சார்பற்ற தனித்த பாய்சான் மாறிகளின் பரவல்களின் சுட்டுறுப்புகள் முறையே m_1, m_2 எனில், அவைகளின் இணைந்த நிகழ்தகவுத் திணிவுச் சார்பு

$$f(x_1, x_2) = f(x_1)\, f(x_2)$$

$$= \frac{e^{-m_1}\, m_1^{x_1}}{x_1\,!} \; \frac{e^{-m_2}\, m_2^{x_2}}{x_2\,!},$$

$$x_1 = 0, 1, 2, \ldots\ldots$$
$$x_2 = 0, 1, 2, \ldots\ldots$$
$$= 0, \quad \text{மற்றபடி}$$

ஆகும்.

X_1, X_2 ஆகிய மாறிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவு பூச்சியத்திற்குக் கூடுதலாக ஏற்றுக்கொள்ளும் புள்ளிகளின் கணப்பகுதி A,

$$A = \left\{ (x_1, x_2) : \begin{array}{l} x_1 = 0, 1, 2, \ldots\ldots \\ x_2 = 0, 1, 2, \ldots\ldots \end{array} \right\}$$

ஆகும்.

இப்போது கூறு அளவை $Y_1 = X_1 + X_2$-ன் நிகழ்தகவுப் பரவலை மாறிகளை மாற்றும் முறையில் பெற விழைவதாகக் கொள்வோம்.

$Y_1 = X_1 + X_2$, $Y_2 = X_2$ ஆகிய இரு கூறு அளவைகளை எடுத்துக் கொள்ளவேண்டும். Y_1, Y_2 ஆகிய மாறிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவு பூச்சியத்திற்குக் கூடுதலாக ஏற்றுக்கொள்ளும் புள்ளிகள் அடங்கியுள்ள கணப்பகுதி, அதாவது கணப்பகுதி A-க்கு இணையான கணப்பகுதி,

$$B = \{ (y_1, y_2) : y_1 = 0, 1, 2, \ldots\ldots \\ y_2 = 0, 1, 2, \ldots\ldots, \\ y_2 \le y_1 \}$$

ஆகும்.

இப்போது, $y_1 = x_1 + x_2$, $y_2 = x_2$ எனும் சார்புகள் A, B ஆகிய இரு கணப் பகுதிகளின் ஒன்றுக்கொன்றான உருமாற்றமாதலால், அச்சார்புகளின் எதிர்மாறான சார்புகள் $x_1 = y_1 - y_2$, $x_2 = y_2$ ஆகின்றன. எனவே, Y_1, Y_2 ஆகிய மாறிகளான இணைந்த நிகழ்தகவுத் திணிவுச் சார்பு

$$g(y_1, y_2) = \frac{e^{-m_1} e^{-m_2} m_1^{y_1 - y_2} m_2^{y_2}}{(y_1 - y_2)!\ y_2!}, \quad (y_1, y_2) \in B$$

$$= 0, \quad \text{மற்றபடி}$$

ஆகும்.

இப்போது, Y-ன் இறுதிநிலைப் பரவல்,

$$g_1(y_1) = \sum_{y_2 = 0}^{y_1} g(y_1, y_2)$$

$$= e^{-m_1} e^{-m_2} \sum_{y_2=0}^{y_1} \frac{1}{(y_1 - y_2)!\ y_2!} m_1^{y_1 - y_2} m_2^{y_2}$$

$$= e^{-(m_1 + m_2)} \frac{(m_1 + m_2)^{y_1}}{y_1!}, \quad y_1 = 0, 1, \ldots\ldots\ldots$$

$$= 0, \quad \text{மற்றபடி}$$

ஆகும்.

இந்நிகழ்தகவுத் திணிவுப் பரவல் $(m_1 + m_2)$-ஐச் சுட்டுறுப் பாகக் கொண்ட பாய்சான் பரவலாகும்.

(ii) தொடர்ச்சி மாறிகளின் உருமாற்றம் (Transformation of Continuous Variables)

ராண்டம் மாறி X ஒரு தொடர்ச்சியான மாறியெனவும், அதன் நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல் $f_X(x)$ எனவும், மெய்யெண் களின் கணப்பகுதி

$$A = \{ x : f_X(x) > 0 \}$$

எனவும் கொள்வோம்.

இப்போது. $Y = \phi(x)$ எனும் ராண்டம் மாறியை எடுத்துக் கொள்வோம்.

கணப்பகுதி A—க்கு இணையான கணப்பகுதி B-ஐ

$$B = \{ y : y = \phi(x),\ x \in A \}$$

எனக் குறிப்போம்.

$y = \phi(x)$ என்பது A, B கணப்பகுதிகளின் ஒன்றுக்கொன்றான உருமாற்றம் எனக் கொள்வோம். மேலும் $y = \phi(x)$-ன் எதிர் மாறான சார்பு $x = \psi(y)$-ன் வகைக் கெழு $\frac{dx}{dy} = \psi'(y)$ ஆனது B கணத்தின் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும்

(i) தொடர்ச்சியானதாகவும்,

(ii) பூச்சிய மதிப்பைப் பெறாதவாறாகவும்

அமைகிறது எனக் கொள்வோம். அப்போது, Y ராண்டம் மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பை

$$\begin{aligned} g_Y(y) &= f[\psi(y)] \mid \psi'(y) \mid, \quad y \in B \\ &= 0, \quad \text{மற்றபடி} \end{aligned}$$

என வழங்குகிறோம். இங்கு $|\psi'(y)|$ ஆனது, $\psi'(y)$-ன் தனி மதிப்பு (absolute value) – ஐக் குறிக்கிறது.

கணக்கு (1)

X மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{x}{2}, \quad 0 < x < 2 \\ &= 0, \quad \text{மற்றபடி} \end{aligned}$$

எனக் கொள்க.

$Y = X^2$ எனும் மாறியை எடுத்துக்கொள்வோம். கணப்பகுதி $A = \{ x : 0 < x < 2 \}$-க்கு இணையான கணப்பகுதி

$$\begin{aligned} B &= \{ y : y = x^2, x \in A \} \\ &= \{ y : 0 < y < 4 \} \end{aligned}$$

ஆகும்.

$y = x^2$ எனும் சார்பானது, A, B ஆகிய கணப்பகுதிகளின் ஒன்றுக்கொன்றான உருமாற்றமாகும். $y = x^2$-ன் எதிர்மாறான சார்பு $x = \psi(y) = \sqrt{y}$ ஆகும். இதன் வகைக் கெழு

$$\psi'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \quad \text{ஆனது}$$

B கணப்பகுதியின் புள்ளிகளில்

(i) தொடர்ச்சியானதாகவும்,

(ii) பூச்சிய மதிப்பைப் பெறாதவாறாகவும்

அமைகிறது.

Y மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$$g_Y(y) = f(\sqrt{y})\ |\psi'(y)|\ , \quad y \in B$$
$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{y}\ \frac{1}{2\sqrt{y}} = \tfrac{1}{4}\ , \quad y \in B$$
$$= 0, \quad \text{மற்றபடி}$$

ஆகும்.

கணக்கு (2)

ராண்டம் மாறி Y -ன் பரவல் சார்பு

$$F_Y(x) = 0\ , \quad x \le 0$$
$$= x\ , \quad 0 < x \le 1$$
$$= 1\ , \quad x > 1$$

எனில், $U = -2\log_e Y$

ராண்டம் மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவலைப் பெறு வோம்.

Y - மாறியின் பரவல் சார்பானது ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பாக அமைகிறது. எனவே, அதன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு,

$$f_Y(x) = 1\ , \quad 0 < x \le 1$$
$$= 0\ , \quad \text{மற்றபடி}$$

ஆகும்.

கணப்பகுதி $A = \{x : 0 < x \le 1\}$ -க்கு இணையான
கணப்பகுதி $B = \{u : u = -2\log_e x, x \in A\}$
$= \{u : 0 < u < \infty\}$

ஆகும்.

$u = -2\log_e x$ எனும் சார்பானது, A, B ஆகிய கணப்பகுதி களின் ஒன்றுக்கொன்றான உருமாற்றம் ஆகும். இச்சார்பின் எதிர் மாறான சார்பு

$$x = \psi(y) = e^{-u/2}$$

ஆகிறது. இதன் வகைக்கெழு $\psi'(y) = \dfrac{dx}{du} = -\tfrac{1}{2}e^{-u/2}$

ஆகும். இது B கணப்பகுதியின் புள்ளிகளில்

(i) தொடர்ச்சியானதாகவும்,

(ii) பூச்சிய மதிப்புப் பெருதவாறுகவும் உள்ளது.

எனவே, U- மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்

$$g_u(u) = f(e^{-u/2}) \, |\psi'(y)|, \; u \in B$$
$$= \tfrac{1}{2} e^{-u/2}, \; 0 \leq u < \infty$$
$$= 0, \; \text{மற்றபடி}$$

ஆகும்.

n – பரிமாண வெளி மெய்யெண்களின் கணம் R-ன்

$$R = \{ (t_1, t_2, \ldots\ldots, t_n) : -\infty < t_i < \infty, \; i = 1, 2, \ldots, n \}$$

உட்கணம் A எனக் கொள்வோம்.

இப்போது,

$$y_1 = u_1(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n)$$
$$y_2 = u_2(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n)$$
$$\ldots$$
$$\ldots$$
$$\ldots$$

$y_n = u_n(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n)$ எனும் n சார்புகளை எடுத்துக் கொள்வோம். இச்சார்புகள் A கணப்பகுதிக்கு இணையாக உருவாக்கும் கணப்பகுதி B.

$$B = \{ (y_1, y_2, \ldots, y_n) : y_i = u_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \; (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A \}$$

ஆகும்.

$y_1, y_2, \ldots, y_n$ ஆகிய சார்புகள் A, B ஆகிய கணப்பகுதிகள் ஒன்றுக்கொன்றுன உருமாற்றமாக அமைகிறது என்போம். அப்போது, $y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n$ ஆகிய சார்புகளின் எதிர்மாறுன சார்புகள்

$$x_1 = v_1(y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n)$$
$$x_2 = v_2(y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n)$$
$$\ldots$$
$$\ldots$$
$$\ldots$$
$$x_n = v_n(y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n)$$

என்போம்

$x_i = v_i(y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots, y_n), i = 1, 2, \ldots\ldots, n$ ஆகியவை களின் முதல் பகுதி வகைக் கெழுக்களை

$$\frac{\partial x_i}{\partial y_j}, \quad i, j = 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots, n$$ எனக் குறிப்போம்.

இப்பகுதி வகைக் கெழுக்கள் யாவும் B கணத்தில் தொடர்ச்சி யானதாகவும், கீழ்க்காணும் அணிக்கோவை (determinant),

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial x_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \frac{\partial x_n}{\partial y_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

ஆனது, B கணத்தில் பூச்சிய மதிப்பையடையாமலும் இருப்ப தாகக் கொள்வோம்.

இப்போது

$$\overbrace{\int_A \int \cdots \int}^{n \text{ முறைகள்}} \phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

$$= \overbrace{\int_B \int \cdots \int}^{n \text{ முறைகள்}} \phi\,[\,v_1(y_1, y_2, \ldots, y_n), \; v_2(y_1, y_2, \ldots, y_n), \; \vdots \; v_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)\,] \times |J|\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_n$$

என்பது கணிதவியலில் ஒரு தேற்றமாகும்.

J அணிக்கோவையை உருமாற்றத்தின் ஜாக்கோபியன் என அழைக்கிறோம். $|J|$ ஆனது J-ன் தனிமதிப்பு (absolute value) ஐக் குறிக்கிறது.

ஜாக்கோபியன் J-ஐ, அணிக்கோவை W-ன்

$$W = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

வாயிலாக, $J = \frac{1}{W}$ எனவும் பெறுகிறோம்.

$X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ ஆகியன தொடர்ச்சியான, சார்பற்ற மாறிகளெனவும், அவைகளின் இணைந்த நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$\phi\,(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ எனவும்,

$Y_i = U_i\,(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots\ldots, n$ ஆகியவைகள் X மாறிகளின் சார்புகளெனவும், வெக்டர் $(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n)$ -ன் வெளி A எனவும், வெக்டர் $(Y_1, Y_2, \ldots\ldots, Y_n)$-ன் வெளி B எனவும் கொள்வோம். இப்போது, $y_i = u_i\,(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots\ldots, n$ என்பன மேலே கூறிய தேற்றத்தின் விதிகளுக்குட்பட்டு அமையின், $Y_1, Y_2, \ldots\ldots, Y_n$ ஆகிய மாறிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$$\begin{aligned} g\,(y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n) &= |\,J\,|\,\phi\,[\,v_1(y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n),\ v_2(y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n) \\ &\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots,\ v_n(y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n)\,], \\ &\qquad (y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n) \in B \\ &= 0, \qquad \text{மற்றபடி} \end{aligned}$$

ஆகும்.

கணக்கு

X_1, X_2 என்பன X-மாறி வெளியிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்படும் சமவாய்ப்புக் கூறெனில், $Y = X_1 + X_2$ எனும் மாறியின் கூறு பரவலைப் பெறுக.

X-மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்,

$$f_X(x) = 1, \quad 0 < x < 1$$
$$= 0, \quad \text{மற்றபடி}$$

ஆகும். எனவே (X_1, X_2) மாறிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்

$$\phi (x_1, x_2) = f_{X_1} (x_1) f_{X_2} (x_2)$$
$$= 1, \quad 0 < x_1 < 1, \; 0 < x_2 < 1$$
$$= 0, \quad \text{மற்றபடி}$$

இப்போது,

$$Y_1 = U_1 (X_1, X_2) = X_1 + X_2$$
$$Y_2 = U_2 (X_1, X_2) = X_1 - X_2$$

ஆகிய இரு சார்புகளை எடுத்துக் கொள்வோம்.

X_1, X_2 ஆகிய இருமாறிகளின் வெளி,

$$A = \{ x_1, x_2 : 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1 \}$$

எனில், Y_1, Y_2 ஆகிய மாறிகளின் வெளி

$$B = \{ y_1, y_2 : u_1 (x_1, x_2) = y_1$$
$$u_2 (x_1, x_2) = y_2,$$
$$(x_1, x_2) \in A \}$$

ஆகும்.

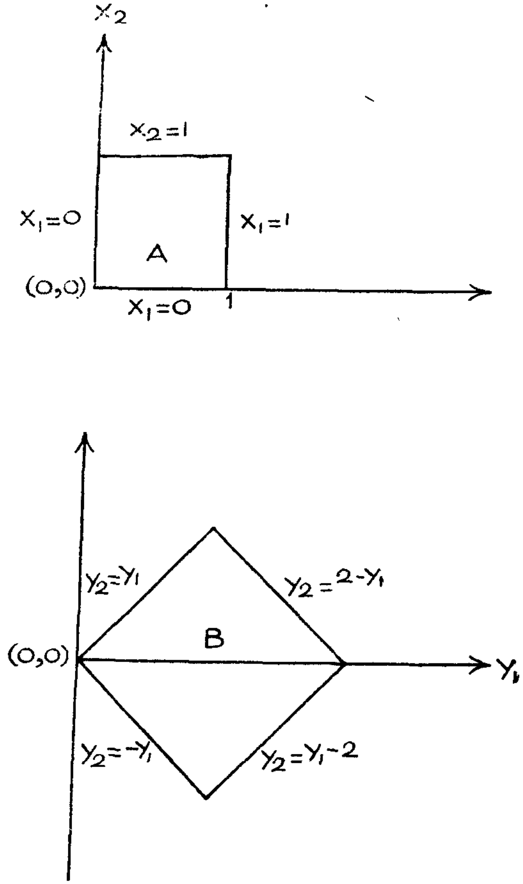
இப்போது சார்புகள்

$$y_1 = u_1 (x_1, x_2) = x_1 + x_2$$
$$y_2 = u_2 (x_1, x_2) = x_1 - x_2$$

ஆனவை A, B களின் ஒன்றுக்கொன்றான உருமாற்றமாகும்.

இச் சார்புகளின் எதிர்மாறான சார்புகள்

$$x_1 = \tfrac{1}{2} (y_1 + y_2) = v_1 (y_1, y_2)$$
$$x_2 = \tfrac{1}{2} (y_1 - y_2) = v_2 (y_1, y_2)$$



படம் 4.3

இப்போது,

$$x_1 = 0 \text{ எனில், } \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2) = 0$$
$$x_1 = 1 \text{ எனில், } \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2) = 1$$
$$x_2 = 0 \text{ எனில், } \tfrac{1}{2}(y_1 - y_2) = 0$$
$$x_2 = 1 \text{ எனில், } \tfrac{1}{2}(y_1 - y_2) = 1$$

ஆகின்றன.

எனவே, கணம் B-ல் அடங்கும் புள்ளிகள் படம் 4·3-ல் காட்டப்பட்டுள்ள சாய் சதுரத்தில் அடங்கும் புள்ளிகளாகும்.

உருமாற்றத்தின் ஜாக்கோபின்

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

Y_1, Y_2 மாறிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு,

$$g(y_1, y_2) = \begin{cases} |J|\,\phi\,[v_1(y_1, y_2), v_2(y_1, y_2)], & (y_1\, y_2) \in B \\ 0, & \text{மற்றபடி} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}, & (y_1\, y_2) \in B \\ 0, & \text{மற்றபடி} \end{cases}$$

இப்போது Y_1 மாறியின் இறுதிநிலைப் பரவலைக் கீழ்க்கண்ட தொகை

$$g_1(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y_1, y_2)\, dy_2$$

வாயிலாகப் பெறுகிறோம்.

படம் 4.3 லிருந்து கீழ்க்காணும் கோவையை அடைகிறோம்.

$$g_1(y_1) = \int_{-y_1}^{y_1} \tfrac{1}{2}\, dv_2 = y_1 \,, \quad 0 < y_1 < 1$$

$$= \int_{y_1-2}^{2-y_1} \tfrac{1}{2}\, dy_1 = 2-y_1 \,, \quad 1 < y_1 < 2$$

$$= 0 \,, \quad \text{மற்றபடி}$$

இது போன்றே, $Y_2 = (X_1 - X_2)$ மாறியின் இறுதிநிலைப் பரவலை அடைகிறோம்.

$$g_2(y_2) = \int_{-y_2}^{2+y_2} \tfrac{1}{2}\, dy_1 = y_2 + 1 \,, \quad -1 < y_2 < 0$$

$$= \int_{y_2}^{2-y_2} \tfrac{1}{2}\, dy_1 = 1 - y_2, \qquad 0 < y_2 < 1$$

$$= 0 \,, \quad \text{மற்றபடி}$$

கணக்கு

தொடர்ச்சியான மாறி X-ன் நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்,

$$f_X(x) = \tfrac{1}{2} e^{-x/2}, \quad 0 < x < \infty$$
$$= 0, \quad \text{மற்றபடி}$$

என்போம். (X_1, X_2) ஆனது X மாறியின் பரவலிலிருந்து பெற்ற சம வாய்ப்புக் கூறு எனில், $Y_1 = \frac{1}{2}(X_1 - X_2)$ மாறியின் கூறுபரவலைப் பெறுவோம்.

X_1, X_2 மாறிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவுப் பரவல்

$$\phi(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)$$
$$= \tfrac{1}{4} e^{-\frac{1}{2}(x_1 + x_2)}, \quad 0 < x_1 < \infty, \; 0 < x_2 < \infty$$
$$= 0, \quad \text{மற்றபடி}$$

ஆகும்.

இப்போது,

$$Y_1 = u_1(X_1, X_2) = \tfrac{1}{2}(X_1 - X_2)$$
$$Y_2 = u_2(X_1, X_2) = X_2$$

ஆகிய இரு சார்புகளை எடுத்துக்கொள்வோம்.

X_1, X_2 மாறிகளின் வெளி,

$$A = \left\{ (x_1, x_2) : \begin{array}{l} 0 < x_1 < \infty, \\ 0 < x_2 < \infty \end{array} \right\}$$

எனில் Y_1, Y_2 மாறிகளின் வெளி,

$$B = \left\{ (y_1, y_2) : y_1 = \frac{(x_1 - x_2)}{2}, \; y_2 = x_2 \atop x_1, x_2 \in A \right\}$$
$$= \left\{ (y_1, y_2) : -2y_1 < y_2, \; 0 < y_2 < \infty, \atop -\infty < y_1 < \infty \right\}$$

ஆகும்.

இப்போது,

$$y_1 = u_1(x_1, x_2) = \tfrac{1}{2}(x_1 - x_2)$$
$$y_2 = u_2(x_1, x_2) = x_2$$

ஆகிய சார்புகள் A, B களின் ஒன்றுக்கொன்றான உருமாற்றமாகும். இவைகளின் எதிர்மாறான சார்பு,

$$x_1 = v_1(y_1, y_2) = 2y_1 + y_2$$
$$x_2 = v_2(y_1, y_2) = y_2$$

உருமாற்றத்தின் ஜாக்கோபியன்

$$J = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

Y_1, Y_2 மாறிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு,

$$\begin{aligned} g(y_1, y_2) &= |J| \ \phi[v_1(y_1, y_2), v_2(y_1, y_2)], \quad (y_1, y_2) \in B \\ &= 0, \quad \text{மற்றபடி} \\ &= \tfrac{1}{2} e^{-(y_1 + y_2)}, \quad (y_1, y_2) \in B \\ &= 0, \quad \text{மற்றபடி} \end{aligned}$$

எனவே, Y_1-ன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$$g_1(y_1) = \int_0^{\infty} g(y_1, y_2) \ dy_2$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_{-2y_1}^{\infty} \tfrac{1}{2} e^{-(y_1 + y_2)} dy_2, & -\infty < y_1 < 0 \\ \displaystyle\int_0^{\infty} \tfrac{1}{2} e^{-(y_1 + y_2)}, & 0 \le y_1 < \infty \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \tfrac{1}{2} e^{y_1}, & -\infty < y_1 < 0 \\ \tfrac{1}{2} e^{-y_1}, & 0 \le y_1 < \infty \end{cases}$$

அதாவது,

$$g_1(y_1) = \tfrac{1}{2} e^{-|y_1|}, \quad -\infty < y_1 < \infty$$

இந் நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவலை **இருமாறி அடுக்குக் குறி பரவல்** (Double exponential distribution) என வழங்குகிறோம்.

கணக்கு

X_1, X_2, X_3, X_4 ஆகியன தொடர்ச்சியான, சார்பற்ற மாறிகள் எனவும், X_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்

$$f_{X_i}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} e^{-x} x^{\alpha_i - 1}, \quad 0 < x < \infty$$
$$= 0, \qquad \text{மற்றபடி}$$

எனவும் கொள்வோம்.

X_1, X_2, X_3, X_4 ஆகிய மாறிகளின் சார்பற்ற மாறிகளாதலால் அவைகளின் இணைந்த நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்

$$\phi(x_1\ x_2\ x_3\ x_4) = f_{X_1}(x_1)\ f_{X_2}(x_2)\ f_{X_3}(x_3)\ f_{X_4}(x_4)$$
$$= \prod_{i=1}^{4} \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} e^{-x_i} x_i^{\alpha_i - 1},$$
$$0 < x_i < \infty, \quad i = 1, 2, 3, 4$$
$$= 0, \qquad \text{மற்றபடி}$$

இப்போது,

$$Y_i = \frac{X_i}{X_1 + X_2 + X_3 + X_4}, \quad i = 1, 2, 3$$
$$Y_4 = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$$

ஆகிய நான்கு சார்புகளை எடுத்துக்கொள்வோம்.

X_1, X_2, X_3, X_4 ஆகிய மாறிகளின் வெளி

$$A = \{ (x_1\ x_2\ x_3\ x_4) : 0 < x_i < \infty,\ i = 1, 2, 3, 4 \}$$

ஆகும்.

Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 ஆகிய மாறிகளின் வெளி,

$$B = \left\{ (y_1, y_2, y_3, y_4) : \begin{array}{l} 0 < y_i,\ i = 1, 2, 3 \\ y_1 + y_2 + y_3 \leq 1 \\ 0 < y_4 < \infty \end{array} \right\}$$

ஆகும்.

இப்போது,

$$Y_i = \frac{x_i}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}, \qquad i = 1, 2, 3$$
$$Y_4 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

ஆகிய சார்புகள் A, B ஆகிய கணப் பகுதிகளான ஒன்றுக் கொன்றான உருமாற்றமாக அமைகின்றன. இச்சார்புகளின் எதிர் மாறான சார்புகள்,

$$x_1 = y_1 y_4, \quad x_2 = y_2 y_4, \quad x_3 = y_3 y_4,$$
$$x_4 = (1 - y_1 - y_2 - y_3) y_4$$

ஆகின்றன.

உருமாற்றத்தின் ஜாக்கோபியன்

$$J = \begin{vmatrix} y_4 & 0 & 0 & y_1 \\ 0 & y_4 & 0 & y_2 \\ 0 & 0 & y_4 & y_3 \\ -y_4 & -y_4 & -y_4 & (1-y_1-y_2-y_3) \end{vmatrix}$$

$$= y_4^3$$

எனவே, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 ஆகிய மாறிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்,

$$g(y_1 y_2 y_3 y_4)$$
$$= \frac{y_4^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-1}\, y_1^{\alpha_1-1} y_2^{\alpha_2-1} y_3^{\alpha_3-1} (1-y_1-y_2-y_3)^{\alpha_4-1}}{\overline{|\alpha_1}\;\overline{|\alpha_2}\;\overline{|\alpha_3}\;\overline{|\alpha_4}} \times e^{-y_4}$$

$$(y_1 y_2 y_3 y_4) \in B$$

$= 0$, மற்றபடி

எனவே, Y_1, Y_2, Y_3 மாறிகளின் அடர்த்திப் பரவல்,

$$g_1(y_1 y_2 y_3) = \int_0^\infty g(y_1 y_2 y_3 y_4)\, dy_4$$

$$= \frac{\overline{|(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)}}{\overline{|\alpha_1}\;\overline{|\alpha_2}\;\overline{|\alpha_3}\;\overline{|\alpha_4}}\, y_1^{\alpha_1-1}\, y_2^{\alpha_2-1}\, y_3^{\alpha_3-1} (1-y_1-y_2-y_3)^{\alpha_4-1},$$

$$0 < y_i,\ i = 1, 2, 3$$
$$y_1 + y_2 + y_3 < 1$$

$= 0$, மற்றபடி

இவ்வடர்த்திப் பரவலை **'டிரிக்லெ' பரவல்** என வழங்குகிறோம்.

கணக்கு

X_1, X_2 ஆகியன திட்ட இயல்நிலைப் பரவலிலிருந்து பெற்ற சமவாய்ப்புக் கூறு எனில், கூறு அளவை $Y_1 = \frac{X_1}{X_2}$ -ன் கூறுபரவலை இப்போது பெறுவோம். X_1, X_2 ஆகிய மாறிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவுப் பரவல்,

$$\phi(x_1 x_2) = f_{X_1}(x_1)\, f_{X_2}(x_2) = \frac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)}$$

$(X_1 X_2)$ மாறிகளின் வெளி $A = \{ (x_1 x_2) : \begin{matrix} -\infty < x_1 < \infty \\ -\infty < x_2 < \infty \end{matrix} \}$

இப்போது $Y_1 = \frac{X_1}{X_2}$, $Y_2 = X_2$ ஆகிய புதிய மாறிகளை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$\text{புதிய மாறிகளின் வெளி, } B = \left\{ \begin{matrix} (y_1, y_2),\ y_1 = \frac{x_1}{x_2},\ y_2 = x_2 \\ -\infty < x_1 < \infty \\ -\infty < x_2 < \infty \end{matrix} \right\}$$

$$= \left\{ (y_1, y_2) : \begin{matrix} -\infty < y_1 < \infty \\ -\infty < y_2 < \infty \end{matrix} \right\}$$

ஆகும்.

இப்போது, $y_1 = u_1(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_2}$, $y_2 = u_2(x_1, x_2) = x_2$ ஆகிய சார்புகள், A, B கணங்களின் ஒன்றுக்கொன்றான உருமாற்றமாவதால், சார்புகளின் எதிர்மாறான சார்புகள் $x_1 = v_1(y_1 y_2) = y_1 y_2$, $x_2 = v_2(y_1 y_2) = y_2$ ஆகின்றன.

உருமாற்றத்தின் ஜாக்கோபியன்,

$$J = \begin{vmatrix} y_2 & y_1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = y_2$$

ஆகும்.

எனவே, Y_1, Y_2 ஆகிய மாறிகளின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$$g_{y_1 y_2}(y_1 y_2) = \phi[v_1(y_1 y_2),\ v_2(y_1 y_2)]\ |J|$$

$$= \frac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{1}{2}(y_1^2 y_2^2 + y_2^2)} \cdot y_2$$

ஆகும்.

Y_1 மாறியின் இறுதிநிலைச் சார்பு

$$h(y_1) \int_{-\infty}^{\infty} g(y_1\, y_2)\, dy_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{1}{2} y_2^2 [1 + y_1^2]} \times y_2\, dy_2$$

$$= \frac{1}{\pi (1 + y_1^2)}, \quad -\infty < y_1 < \infty$$

இப்பரவலை **'கோசி' பரவல்** (Cauchy Distribution) என அழைக்கிறோம்.

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ ஆகிய 'n' தொடர்ச்சியான மாறிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $\phi\,(x_1\, x_2 \ldots x_n)$ எனவும். கணப்பகுதி A,

$$A = \{ (X_1, X_2, \ldots, X_n) : \phi\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0 \}$$

எனவும் கொள்வோம்.

$$Y_1 = U_1\,(x_1\; x_1 \ldots\ldots\ldots x_n)$$
$$Y_2 = U_2\,(x_1\; x_2 \ldots\ldots\ldots x_n)$$
$$\ldots$$
$$\ldots$$
$$\ldots$$
$$Y_n = U_n\,(x_1\; x_2 \ldots\ldots\ldots x_n)$$

ஆகிய ராண்டம் மாறிகளை எடுத்துக்கொள்வோம். இம்மாறிகளின் வெளி B,

$$B = \{ (y_1 \ldots y_n) : u_i\,(x_1\; x_2 \ldots x_n),\; i = 1, 2, \ldots, n, \; (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A \}$$

ஆகும்.

$$y_i = u_i\,(x_1\; x_2 \ldots x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

ஆகிய சார்புகள் A, B கணப்பகுதிகளின் உருமாற்றம் எனக் கொள்வோம். A-ல் இடம்பெறும் ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் இணையாக ஒரு புள்ளி B-ல் இடம் பெறுகிறது. ஆனால் B-ல் இடம்பெறும் ஒரு புள்ளிக்கு இணையாக ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட புள்ளிகள் A-ல் இடம் பெறுகின்றன என்போம். இப்போது, A கணத்தை, $A_1\, A_2 \ldots\ldots\ldots A_k$ ஆகிய 'K' பிரிந்த பகுதிகளாக எடுத்துக்கொள்வோம். அப்போது, $y_i = u_i\,(x_1\; x_2 \ldots\ldots x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ ஆகிய சார்புகள்

A_1, B ஆகிய இரு கணப்பகுதிகளின் ஒன்றுக்கொன்றான உருமாற்றமாகவும்,

A_2, B ஆகிய இரு கணப்பகுதிகளின் ஒன்றுக்கொன்றான உருமாற்றமாகவும்,

...

...

...

A_i, B ஆகிய இரு கணப்பகுதிகளின் ஒன்றுக்கொன்றான உருமாற்றமாகவும்,

...

...

...

A_k, B ஆகிய இரு கணப்பகுதிகளின் ஒன்றுக்கொன்றான உருமாற்றமாகவும் அமைகிறது என்போம்.

A_j, B ஆகிய கணப்பகுதிகளின் ஒன்றுக்கொன்றான உருமாற்றமாக அமையும்.

$$y_i = u_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

சார்புகளின் எதிர்மாறான சார்புகள்,

$$\begin{aligned} x_1 &= v_{1j}(y_1\, y_2 \ldots y_n) \\ x_2 &= v_{2j}(y_1\, y_2 \ldots y_n) \\ &\ldots \\ x_n &= v_{nj}(y_1\, y_2 \ldots y_n), \qquad j = 1, 2, \ldots, k \end{aligned}$$

என்போம்.

$$J_j = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial v_{1j}}{\partial y_1} & \dfrac{\partial v_{1j}}{\partial y_2} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial v_{1j}}{\partial y_n} \\ \dfrac{\partial v_{2j}}{\partial y_1} & \dfrac{\partial v_{2j}}{\partial y_2} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial v_{2j}}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial v_{nj}}{\partial y_1} & \dfrac{\partial v_{nj}}{\partial y_2} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial v_{nj}}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

ஆகிய K அணிக் கோவைகள் B கணப்பகுதி புள்ளிகளில் பூச்சிய மல்லாத மதிப்புகளாகவும்,

$$\frac{\partial v_{rj}}{\partial y_i}, \qquad i, r = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, k$$

ஆகிய பகுதிவகைக் கெழுக்கள் B கணப்பகுதிகளில் தொடர்ச்சி யானதாகவும் அமைகின்றன என்போம்.

இப்போது, Y_1, Y_2, ..., Y_n ராண்டம் மாறிகளின் நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்,

$$g(y_1 y_2 \dots y_n) = \sum_{j=1}^{k} |J_j| \, \phi \, [v_{1j}(y_1 y_2 \dots y_n), v_{2j}(y_1 y_2 \dots y_n), \dots\dots, v_{nj}(y_1 y_2 \dots y_n)], \quad (y_1 y_2 y_3 \dots y_n) \in B$$

$$= 0, \quad \text{மற்றபடி}$$

ஆகும்.

ராண்டம் மாறி Y_1-ன் நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்

$$g_1(y_1) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots\dots \int_{-\infty}^{\infty}}_{(n-1) \text{ முறைகள்}} g(y_1 y_2 \dots y_n)\, d_{y_2}\, d_{y_3} \dots d_{y_n}$$

ஆகும்.

கணக்கு

X_1, X_2 ஆகியன இயல்நிலைப் பரவல் $N(0, 1)$) இருந்து பெற்ற சமவாய்ப்புக் கூறு எனில் இவைகளின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$$\phi(x_1 x_2) = \frac{1}{2\pi} exp \left\{ - \frac{(x_1^2 + x_2^2)}{2} \right\} \begin{matrix} -\infty < x_1 < \infty \\ -\infty < x_2 < \infty \end{matrix}$$

ஆகும்.

X_1, X_2 மாறிகளின் வெளி

$$A = \{ (x_1, x_2) : -\infty < x_1 < \infty, \quad -\infty < x_2 < \infty \}$$

ஆகும்.

இப்போது, $y_1 = \dfrac{(x_1 + x_2)}{2}$, $y_2 = \dfrac{(x_1 - x_2)^2}{2}$ ஆகிய புதிய மாறிகளின் வெளி $B = \left\{ \begin{matrix} (y_1 y_2) : -\infty < y_1 < \infty \\ 0 < y_2 < \infty \end{matrix} \right\}$

ஆகும்.

$$y_1 = \frac{(x_1 + x_2)}{2}; \quad y_2 = \frac{(x_1 - x_2)^3}{2}$$ ஆகிய சார்புகளைக்

கொண்டு A-ல் இடம்பெறும் ஒவ்வொரு புள்ளிக்கு இணையாக, B-ல் ஒரு புள்ளியைப் பெறுகிறோம். ஆனல் B-ல் இடம்பெறும்

ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் இணையாக, A-ல் இரு புள்ளிகளைப் பெறுகிறோம். ஆகவே இச்சார்புகள், A, B கணப்பகுதிகளின் ஒன்றுக்கொன்றான உருமாற்றமாக அமையவில்லை.

இப்போது, $C = \{(x_1, x_2); (x_1 = x_2)\}$ ஆகிய கணப்பகுதியின் இடம்பெறும் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும்,

நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பின் மதிப்பு $f(x_1\ x_2) = 0$ எனக்கொண்டு

$$A_1 = \{ (x_1, x_2) : x_1 > x_2 \}$$
$$A_2 = \{ (x_1, x_2) : x_1 < x_2 \}$$

என இரு பிரிந்த கணங்களை அமைப்போமெனில்,

$$A_1 \cup A_2 = A - C \text{ ஆகும்.}$$

இப்போது $y_1 = \dfrac{(x_1 + x_2)}{2}$, $y_2 = \dfrac{(x_1 - x_2)^2}{2}$ ஆகிய சார்புகள்

A, B ஆகிய இரு கணங்களின் ஒன்றுக்கொன்றான உருமாற்றமாகும். இச்சார்புகளின் எதிர்மாறான சார்புகள்

$$x_1 = y_1 - \sqrt{\frac{y_2}{2}}$$

$$x_2 = y_1 + \sqrt{\frac{y_2}{2}}$$

ஆகின்றன. உருமாற்றத்தின் ஜாக்கோபியன் $J_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{2y_2}}$

அடுத்து, $y_1 = \dfrac{(x_1 + x_2)}{2}$, $y_2 = \dfrac{(x_1 - x_2)^2}{2}$ ஆகிய சார்புகள்

A_2, B ஆகிய இரு கணப் பகுதிகளின் ஒன்றுக்கொன்றான உருமாற்றமாகும். இச்சார்புகளின் எதிர்மாறான சார்புகள்,

$$x_1 = y_1 + \sqrt{\frac{y_2}{2}}$$

$$x_2 = y_1 - \sqrt{\frac{y_2}{2}}$$

ஆகின்றன. உருமாற்றத்தின் ஜாக்கோபியன் $J_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{2y_2}}$.

எனவே, Y_1, Y_2 மாறிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு,

$$g(y_1 y_2) = \frac{1}{2\pi} \exp\left[-\frac{\left(y_1 - \sqrt{\frac{y_2}{2}}\right)^2}{2} - \frac{\left(y_1 + \sqrt{\frac{y_2}{2}}\right)^2}{2}\right] \frac{1}{\sqrt{2y_2}}$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \exp\left[-\frac{\left(y_1 + \sqrt{\frac{y_2}{2}}\right)^2}{2} - \frac{\left(y_1 - \sqrt{\frac{y_2}{2}}\right)^2}{2}\right] \frac{1}{\sqrt{2y_2}}$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-y_1^2}\right]$$

$$\left[\frac{1}{2^{\frac{1}{2}} \left|\tfrac{1}{2}\right.} e^{-\frac{y_2}{2}} y_2^{\frac{1}{2}-1}\right] = \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-y_1^2}\right]$$

$$\left[\frac{1}{2^{\frac{1}{2}} \left|\tfrac{1}{2}\right.} e^{-y_2} y_2^{\frac{1}{2}-1}\right],$$

$$-\infty < y_1 < \infty, \quad 0 < y_2 < \infty$$

ஆகும்.

இக்கோவையிலிருந்து Y_1, Y_2 மாறிகள் சார்பற்றன எனவும், Y_1 ஆனது இயல்நிலை $N(0, \frac{1}{2})$ மாறியெனவும், Y_2 ஆனது $(\nu = 1)$ கட்டுப்பாடின்மை கொண்ட கைவர்க்க மாறியெனவும் பெறுகிறோம்.

X_1, X_2 ஆகியன $N(0, 1)$ இயல்நிலைப் பரவலிலிருந்து பெற்ற சமவாய்ப்புக் கூறு எனில், கூறு அளவை $Y_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ -ன் நிகழ் தகவு அடர்த்திப் பரவல்

$$f_{y_1}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}, \qquad -\infty < t < \infty$$

ஆகவும்,

கூறு அளவை $y_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2$ -ன் நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்

$$f_{y_2}(t) = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2}}} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}}, \qquad 0 < t < \infty$$

$$= 0, \qquad \text{மற்றபடி}$$

ஆகவும் அமைகின்றன.

விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பு முறை (Method of Moment Generating Function)

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ ஆகியன தொடர்ச்சியான ராண்டம் மாறிகள் எனவும், அவைகளின் இணைந்த நிகழ்தகவுப்பரவல் $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ எனவும், $Y_1 = U_1(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ ஆனது $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ஆகியவைகளின் சார்பெனவும் கொள்ளும்போது Y_1 மாறியின் விலக்கப் பெருக்கத்தை உருவாக்கும் சார்பாகக் கீழ்க்கண்ட தொகை I,

$$I = \underbrace{\int \cdots\cdots\cdots \int}_{n \text{ முறைகள்}} e^{t y_1} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

அமைவதைப் பற்றி இப்போது காண்போம்.

$X_1, X_2, \ldots X_n$ ஆகிய மாறிகளின் வெளியை A எனக் கொள்ளும்போது அது n பரிமாண மெய்யெண்கள் வெளியின் ஒரு பகுதியாக அமையும்.

இப்போது,

$$Y_1 = U_1(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$
$$Y_2 = U_2(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$
$$\vdots$$
$$Y_n = U_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

ஆகிய n மாறிகளை எடுத்துக்கொள்வோம். இம்மாறிகளின் வெளி B,

$$B = \{ (y_1, y_2, \ldots, y_n) : y_1 = u_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \; y_2 = u_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots \; \ldots \; y_n = u_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), \; (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A \}$$

ஆகும்.

இப்போது தொகை I-ஐ

$$I = \underbrace{\int \cdots \int}_{n \text{ முறைகள்}} e^{ty_1} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

புதிய மாறிகள் $Y_1 = U_1(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $Y_2 = U_2(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $\ldots$, $Y_n = U_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ ஆகியவைகள் வாயிலாக வெளிப் படுத்தும்போது,

$$I = \underbrace{\int \ldots \int}_{n \text{ முறைகள்}} e^{ty_1}\; g(y_1, y_2, \ldots, y_n)\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_n$$

$$= \int e^{ty_1} \Big\{ \underbrace{\int \ldots \int}_{(n-1) \text{ முறைகள்}} g(y_1, y_2, \ldots, y_n)\, dy_2\, dy_3 \ldots dy_n \Big\}\; dy_1$$

$$= \int e^{ty_1}\, g_1(y_1)\, dy_1$$

ஆக அமைகிறது. $g_1(y_1)$ ஆனது Y_1 மாறியின் இறுதி நிலைப்பரவல் லாதலால்

$$\int e^{ty_1}\; g_1(y_1)\;\; dy_1 = \underset{y_1}{E}(e^{ty_1})$$

ஆகும். எனவே, $Y_1 = U_1(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ மாறியின் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பாகத் தொகை I,

$$I = \underbrace{\int \ldots \int}_{n \text{ முறைகள்}} e^{ty_1} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

அமைகிறது என்கிறோம்.

இப்போது, $y_1 = u_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y_2 = u_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots$ $\ldots y_n = u_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ஆகிய n சார்புகள் A, B ஆகிய கணங் களின் ஒன்றுக்கொன்றுன உருமாற்றம் எனவும், இச்சார்புகளின் எதிர்மாறுன சார்புகள் $x_1 = v_1(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $x_2 = v_2(y_1, y_2, \ldots, y_n) \ldots$, $x_n = v_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ஆகியன எனவும்,

உருமாற்றத்தின் ஜாக்கோபியன் J

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial y_1} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial y_2} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_2} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial y_2} \\ \vdots & & & \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial y_n} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_n} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

எனவும் கொள்வோம்.

$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ ஆகிய மாறிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவுப் பரவல் $g(y_1, y_2, \ldots, y_n) = f[v_1(y_1, y_2, \ldots, y_n), v_2(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots\ldots,$ $v_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)]$ ஆகும். $|J|$ எனவே, Y_1 மாறியின் இறுதிநிலைப் பரவல்

$$g_1(y_1) = \underbrace{\int \ldots \int}_{n \text{ முறைகள்}} g(y_1, y_2, \ldots, y_n)\, dy_2\, dy_3 \ldots dy_n$$

ஆக அமைகிறது.

இப்போது $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ஆகிய தனித்த ராண்டம் மாறிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவுப் பரவல்

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ எனக்கொள்ளும்போது, $Y_1 = U_1(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ சார்பின் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பாகக் கீழ்க்கண்ட கோவை

$$\sum_{x_1} \sum_{x_2} \cdots \sum_{x_n} e^{ty_1} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

அமைகிறது என்கிறோம்.

சில சமயங்களில், $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ஆகிய மாறிகளின் சார்பு $Y_1 = U_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$-ன் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பைத் தொகை I-ன்

$$I = \underbrace{\int \ldots \int}_{n \text{ முறைகள்}} e^{ty_1} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

அல்லது கோவை G-ன்

$$G = \sum_{x_1} \sum_{x_2} \cdots \sum_{x_n} e^{ty_1} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

வாயிலாகப் பெறுவது எளிதாக அமையும். அப்போது அதைப் பெற்று, விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பு, ராண்டம் மாறியைத் தனியொன்றாக வரையறை செய்யும் பண்பினைப் பயன்படுத்தி, Y_1 மாறியின் கூறுபரவலைப் பெறும் முறையை விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பு முறை என வழங்குகிறோம்.

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ ஆகிய சார்பற்ற ராண்டம் மாறிகளின் நிகழ்தகவுப் பரவல்கள் முறையே $f_{X_1}(x), f_{X_2}(x), \ldots, f_{X_n}(x)$ எனவும், $K_1, K_2, \ldots, K_n$ ஆகியன நிலையெண்கள் எனவும்,

$$Y_1 = K_1 X_1 + K_2 X_2 + \ldots + K_n X_n$$

எனவும் கொள்வோம். அப்போது Y_1 மாறியின் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பு

$$M_{y_1}(t) = E\left(e^{ty_1} \right)$$

$$= \int \ldots \int e^{ty_1} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

n முறைகள்

$$= \int \ldots \int e^{t(k_1x_1 + k_2x_2 + \ldots + k_nx_n)} f_{x_1}(x_1)\, f_{x_2}(x_2) \ldots f_{x_n}(x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

n முறைகள்

$$= \int e^{tk_1x_1} f_{x_1}(x_1) dx_1 \int e^{tk_2x_2} f_{x_2}(x_2)\, dx_2 \ldots \int e^{tk_nx_n} f_{x_n}(x_n)\, dx_n$$

$$= E(e^{tk_1x_1})\, E(e^{tk_2x_2}) \ldots E(e^{tk_nx_n})$$

$$= M_{x_1}(tk_1)\, M_{x_2}(tk_2) \ldots M_{x_n}(tk_n)$$

ஆகும்.

கணக்கு

ஒரு ராண்டம் மாறி X-ன் நிகழ்தகவு திணிவுப் பரவல்

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{6}, & x = 1, 2, 3 \\ 0, & \text{மற்றபடி} \end{cases}$$

எனவும், X_1, X_2 ஆகியன X-பரவலிலிருந்து பெற்ற சமவாய்ப்புக் கூறு எனவும் கொண்டு $Y = X_1 + X_2$ மாறியின் கூறுபரவலை அடைக.

முறை

X_1, X_2 ஆகிய மாறிகளின் சார்பு $Y = (X_1 + X_2)$-ன் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை சார்பு

$$M_Y(t) = E\left(e^{tY}\right) = E\left[e^{t(x_1 + x_2)}\right]$$

$$= E\left(e^{tx_1}\right) E\left(e^{tx_2}\right)$$

$\because X_1, X_2$ ஆகியன சார்பற்றன.

$$= \left[M_X(t)\right]^2$$

$\because X_1, X_2$ ஆகியன X-பரவலைக் கொண்டுள்ளன.

இப்போது, X மாறியின் நிகழ்தகவுப் பரவல்

$$f_X = \begin{cases} \frac{x}{6}, & x=1, 2, 3 \\ 0, & \text{மற்றபடி} \end{cases}$$

ஆவதால் அதன் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பு,

$$M_x(t) = E\left(e^{tx}\right) = \tfrac{1}{6} e^{t} + \tfrac{2}{6} e^{2t} + \tfrac{3}{6} e^{3t} \text{ ஆகும்.}$$

எனவே,

$$M_Y(t) = \left[M_X(t)\right]^2 = \left(\tfrac{1}{6} e^{t} + \tfrac{2}{6} e^{2t} + \tfrac{3}{6} e^{3t}\right)^2$$

$$= \tfrac{1}{36} e^{2t} + \tfrac{4}{36} e^{3t} + \tfrac{10}{36} e^{4t} + \tfrac{12}{36} e^{5t} + \tfrac{9}{36} e^{6t}$$

ஆகும்.

இப்போது, ராண்டம் மாறி U-ன் நிகழ்தகவு திணிவுப் பரவல்

$$\begin{aligned} f_U(x) &= \tfrac{1}{36}, & x &= 2 \\ &= \tfrac{4}{36}, & x &= 3 \\ &= \tfrac{10}{36}, & x &= 4 \\ &= \tfrac{12}{36}, & x &= 5 \\ &= \tfrac{9}{36}, & x &= 6 \\ &= 0, & & \text{மற்றபடி} \end{aligned}$$

எனில், அதன் விலக்கப் பெருக்கும் தொகை உருவாக்கும் சார்பு

$$M_U(t) = E\left(e^{tu}\right) = \sum_x e^{tx} f_u(x)$$

$$= \tfrac{1}{36} e^{2t} + \tfrac{4}{36} e^{3t} + \tfrac{10}{36} e^{4t} + \tfrac{12}{36} e^{5t} + \tfrac{9}{36} e^{6t}$$

ஆகும்.

இப்போது,

$$M_Y(t) = M_U(t)$$

ஆக அமைவதால், விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு ராண்டம் மாறியின் பரவலைத் தனியொன்றாக வரையறுக்கும் பண்பின் வாயிலாக, Y, U ஆகிய மாறிகள் சமமானவை என்கிறோம். ஆகவே, $Y = (X_1 + X_2)$-ன் நிகழ்தகவுத் திணிவுப் பரவல்

$$f_Y(x) = \tfrac{1}{36}, \quad x = 2$$
$$= \tfrac{4}{36}, \quad x = 3$$
$$= \tfrac{10}{36}, \quad x = 4$$
$$= \tfrac{12}{36}, \quad x = 5$$
$$= \tfrac{9}{36}, \quad x = 6$$
$$= 0, \quad \text{மற்றபடி}$$

ஆகும்.

கணக்கு

ஒரு ராண்டம் மாறி X-ன் நிகழ்தகவுத் திணிவுப் பரவல்

$$f_X(x) = 1 - p, \quad x = 0, \quad 0 < p < 1$$
$$= p, \quad x = 1$$
$$= 0, \quad \text{மற்றபடி}$$

எனவும், $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ஆகியன X பரவலிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்படும் சமவாய்ப்புக் கூறு எனவும் கொண்டு Y மாறியின்

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

கூறுபரவலானது n, p ஆகியவைகளைச் சுட்டுறுப்புகளாகக் கொண்ட ஈருறுப்புப் பரவல் என அடைக.

முறை

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ ஆகியன X பரவலிலிருந்து பெற்ற சமவாய்ப்புக் கூறு ஆவதால், அவைகள் சார்பற்றனவாகவும், அவைகளின் பரவல்கள் X பரவலாகவும் அமைகின்றன.

$Y = (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$ மாறியின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு

$$M_Y(t) = E(e^{ty}) = E[e^{t(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)}]$$
$$= [M_X(t)]^n \qquad \because X_1, X_2, \ldots, X_n \text{ ஆகியன } X \text{ பரவலிலிருந்து பெற்ற சமவாய்ப்புக் கூறு}$$

இப்போது, X மாறியின் நிகழ்தகவுத் திணிவுப் பரவல்

$$f_X(x) = 1 - p, \quad x = 0$$
$$= p, \quad x = 1$$
$$= 0, \quad \text{மற்றபடி}$$

ஆவதால், அதன் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பு

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \sum_x e^{tx} = [(1-p) + pe^t]$$

ஆகும்.

எனவே,

$$M_Y(t) = [M_X(t)]^n$$
$$= [(1-p) + pe^t]^n$$

ஆகும்.

இப்போது ஒரு ராண்டம் மாறி U-ன் பரவல் n, p ஆகியவைகளைக் கொண்ட ஈருறுப்புப் பரவல் எனில் அதன் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பு

$$M_U(t) = [(1-p) + pe^t]^n$$

ஆகும்.

இப்போது,

$$M_Y(t) = M_U(t)$$

ஆக அமைவதால், விலக்கப் பெருக்குத்தொகை ராண்டம் மாறியின் பரவலைத் தனியொன்றாக வரையறுக்கும் பண்பின் வாயிலாக, Y, U ஆகிய மாறிகள் சமமானவை என்கிறோம். ஆகவே, $Y = (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$ மாறியின் நிகழ்தகவுப் பரவல், n, p ஆகியவைகளைச் சுட்டுறுப்புகளாகக் கொண்ட ஈருறுப்புப் பரவலாக அமைகிறது என்கிறோம்.

கணக்கு

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ ஆகியன n சார்பற்ற பாய்சான் ராண்டம் மாறிகளெனவும், அவைகளின் சுட்டுறுப்புகள் முறையே $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ எனவும் கொண்டு Y மாறியின்

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

கூறுபரவலைப் பெறுக.

முறை

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ ஆகியன சார்பற்ற மாறிகளாவதால் $Y = (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$ மாறியின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு

$$M_Y(t) = E[e^{t(X_1 + X_2 + \dots + X_n)}]$$
$$= E(e^{tX_1})\ E(e^{tX_2}) \dots E(e^{tX_n})$$
$$= M_{X_1}(t)\ \ M_{X_2}(t)\ \dots\ M_{X_n}(t)$$

ஆகும்.

இப்போது λ_i-ஐச் சுட்டுறுப்பாகக் கொண்ட பாய்சான் மாறி X_i-ன் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு

$$M_{X_i}(t) = e^{-\lambda_i(e^t - 1)}$$

ஆகும். எனவே,

$$M_Y(t) = \prod_{i=1}^{n} [\, M_{X_i}(t)\,]$$

$$= \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i(e^t - 1)}$$

$$= e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)(e^t - 1)}$$

ஆகும்.

இப்போது Y மாறியின் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பானது, $(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)$-ஐச் சுட்டுறுப்பாகக் கொண்ட பாய்சான் மாறியின் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்புக்குச் சமமாக அமைகிறது. விலக்கப் பெருக்குத்தொகை சார்பு, ராண்டம் மாறியின் பரவலைத் தனியொன்றாக வரையறுப்பதால், $Y = (X_1 + X_2 + \dots + X_n)$ மாறியின் பரவல், $(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)$-ஐச் சுட்டுறுப்பாகக் கொண்ட பாய்சான் பரவலாக அமைகிறது என்கிறோம்.

கணக்கு

Y_1, Y_2 ஆகிய இரு சார்பற்ற இயல்நிலை மாறிகளின் சுட்டுறுப்பு வெக்டர்கள் முறையே $(\mu_1, \sigma_1^2), (\mu_2, \sigma_2^2)$ எனில், $Z = (Y_1 - Y_2)$ மாறியின் கூறுபரவலைப் பெறுக.

முறை

Y_1, Y_2 ஆகியன சார்பற்ற மாறிகளாவதால், $Z = (Y_1 - Y_2)$ மாறியின் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பு

$$M_Z(t) = E(e^{tz}) = E[e^{t(Y_1 - Y_2)}]$$
$$= E(e^{tY_1})\ E(e^{-tY_2})$$
$$= M_{Y_1}(t)\, M_{Y_2}(-t)$$

ஆகும்.

இப்போது, சுட்டுறுப்பு வெக்டர் (μ_i, σ_i^2)-ஐக் கொண்ட இயல்நிலை மாறி Y_i-ன் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பு

$$M_{Y_i}(t) = e^{t\mu_i + \sigma_i^2 t^2/2}, \qquad i = 1, 2$$

ஆகும். எனவே,

$$M_Z(t) = M_{Y_1}(t)\, M_{Y_2}(-t)$$
$$= e^{(\mu_1 - \mu_2)t + \frac{t^2}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}$$

ஆகும். இச்சார்பு, சுட்டுறுப்பு வெக்டர் $((\mu_1 - \mu_2), (\sigma_1^2 + \sigma_2^2))$ ஐக் கொண்ட இயல்நிலை மாறியின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பாக அமைகிறது. விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு, ராண்டம் மாறியின் பரவலைத் தனியொன்றாக வரையறுப்பதால், $Z = (Y_1 - Y_2)$ மாறியின் பரவல் சுட்டுறுப்பு வெக்டர் $((\mu_1 - \mu_2), (\sigma_1^2 + \sigma_2^2))$ ஐக் கொண்ட இயல்நிலைப் பரவலாக அமைகிறது.

கணக்கு

X_1, X_2, X_3 ஆகிய சார்பற்ற காமா ராண்டம் மாறிகளின் சுட்டுறுப்பு வெக்டர்கள் முறையே (α, p_1), (α, p_2), (α, p_3) எனில், $Y = (X_1 + X_2 + X_3)$ மாறியின் கூறுபரவலை அடைக.

முறை

X_1, X_2, X_3 ஆகிய மாறிகள் சார்பற்றனவாதலால், $Y = (X_1 + X_2 + X_3)$ மாறியின் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பு

$$M_Y(t) = M_{X_1}(t)\ M_{X_2}(t)\ M_{X_3}(t)$$

ஆகும்.

சுட்டுறுப்பு வெக்டர் (α, p) ஐக் கொண்ட காமா மாறி X-ன் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \frac{\alpha^p}{\lceil p}\int_0^\infty e^{tx}\, e^{-\alpha x}\, x^{p-1}\, dx$$

$$= (1 - t/\alpha)^{-p} \quad , \qquad t < \alpha$$

ஆகும்.

எனவே,

$$M_Y(t) = (1 - t/\alpha)^{-p_1}(1 - t/\alpha)^{-p_2}(1 - t/\alpha)^{-p_3}$$
$$= (1 - t/\alpha)^{-(p_1 + p_2 + p_3)}$$

ஆகும். இச்சார்பு சுட்டுறுப்பு வெக்டர் $(\alpha, p_1 + p_2 - p_3)$ ஐக் கொண்ட காமா பரவலின் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பாக அமைகிறது. விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு, ராண்டம் மாறியின் பரவலைத் தனியொன்றாக வரையறுப்பதால், $Y = (X_1 + X_2 + X_3)$ மாறியின் பரவல், சுட்டுறுப்பு வெக்டர் $(\alpha, p_1 + p_2 + p_3)$ ஐக் கொண்ட காமா பரவலாக அமைகிறது.

கணக்கு

X_1, X_2 ஆகிய இரு சார்பற்ற இயல்நிலை மாறிகளின் சராசரிகள் முறையே μ_1, μ_2 எனவும், அவைகளின் திட்டவிலக்கங்கள் முறையே σ_1, σ_2 எனவும் கொண்டு

$$Y = \left(\frac{X_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{X_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2$$

மாறியின் கூறுபரவலை அடைக.

முறை

X_1 மாறியானது இயல்நிலை $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ மாறி என்பதால், $U_1 = \dfrac{X_1 - \mu_1}{\sigma_1}$ மாறியானது திட்ட இயல்நிலை $N(0, 1)$ மாறியாகும். X_2 மாறியானது இயல்நிலை $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ என்பதால், $U_2 = \dfrac{X_2 - \mu_2}{\sigma_2}$ மாறியானது திட்ட இயல்நிலை $N(0, 1)$ மாறியாகும். எனவே,

$$Y = \left(\frac{X_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{X_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2$$
$$= U_1^2 + U_2^2$$

ஆகும்.

Y மாறியின் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பு

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= E\{e^{tY}\} \\ &= E\{e^{t(U_1^2 + U_2^2)}\} \\ &= E\{e^{tU_1^2}\}\, E\{e^{tU_2^2}\} \\ &= M_{U_1^2}(t)\, M_{U_2^2}(t) \end{aligned}$$

ஆகும்.

இப்போது U மாறியானது திட்ட இயல்நிலை மாறியெனில், U^2-ன் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பு

$$\begin{aligned} M_{U^2}(t) &= E\{e^{tu^2}\} \\ &= \int_{\infty}^{\infty} e^{tu^2} f_U(u)\, du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tu^2} \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\, du \\ &- (1-2t)^{-1}, \quad t < \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

ஆகும்.

U_1, U_2 ஆகிய இரு மாறிகளும் திட்ட இயல்நிலை மாறிகளாவதால் U_1^2, U_2^2 ஆகியவைகளின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்புகள்

$$\begin{aligned} M_{U_1^2}(t) &= (1-2t)^{-1}, \quad t < \tfrac{1}{2} \\ M_{U_2^2}(t) &= (1-2t)^{-1}, \quad t < \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

ஆகின்றன. எனவே,

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= M_{U_1^2}(t)\, M_{U_2^2}(t) \\ &= (1-2t)^{-2}, \quad t < \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

ஆகும்.

இப்போது ஒரு காமா மாறி Z-ன் பரவல்

$$f_Z(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^2 \Gamma_2} e^{-\frac{1}{2}x} x^{2-1}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

எனில், அதன் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பு

$$M_Z(t) = E\{e^{tz}\}$$
$$= (1-2t)^{-2}, \qquad t < \tfrac{1}{2}$$

ஆகும்.

இப்போது,

$$M_Y(t) = M_Z(t), \qquad t < \tfrac{1}{2}$$

ஆக அமைவதால், விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு, ராண்டம் மாறியின் பரவலைத் தனியொன்றாக வரையறுக்கும் பண்பின் வாயிலாக, Y, Z ஆகிய மாறிகள் சமமானவை என்கிறோம். ஆகவே,

$$Y = \left(\frac{X_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{X_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2$$

மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{x}{4} e^{-\frac{x}{2}}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{மற்றபடி} \end{cases}$$

என அடைகிறோம்.

தேற்றம் 1

$X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ ஆகிய சார்பற்ற இயல்நிலை ராண்டம் மாறிகளின் பரவல்கள் முறையே $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $N(\mu_2, \sigma_2^2), \ldots\ldots$, $N(\mu_n, \sigma_n^2)$ எனவும், $K_1 K_2, \ldots\ldots, K_n$ ஆகியன மெய்யான நிலையெண்கள் எனவும் கொள்வோமெனில், ராண்டம் மாறி $Y = K_1 X_1 + K_2 X_2 + \ldots\ldots + K_n X_n$ ஆனது ஓர் இயல்நிலை மாறியாகும். இதன் சராசரி $K_1 \mu_1 + K_2 \mu_2 + \ldots\ldots + K_n \mu_n$ ஆகவும், மாறுபாடு $K_1^2 \sigma_1^2 + K_2^2 \sigma_2^2 + \ldots\ldots + K_n^2 \sigma_n^2$ ஆகவும் அமைகின்றன.

தெரிப்பு

$X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ ஆகிய ராண்டம் மாறிகள் சார்பற்றவைகளாதலால், மாறி Y-ன் விலக்கப் பெருக்கத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு

$$M_Y(t) = E(e^{ty}) = E[e^{t(k_1x_1 + k_2x_2 + \ldots\ldots + k_nx_n)}]$$
$$= E(e^{tk_1x_1})\,E(e^{tk_2x_2}) \ldots\ldots E(e^{tk_nx_n})$$
$$= \prod_{i=1}^{n} E(e^{tk_ix_i})$$

இப்போது, X_i மாறியானது இயல்நிலை $N(\mu_i, \sigma_i^2)$ மாறி பரவுதால்,

$$E(e^{tx_i}) = \exp\left(t\mu_i + \frac{t^2\sigma_i^2}{2}\right), \; -\infty < t < \infty \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore \quad E(e^{tk_ix_i}) = \exp\left[\mu_i(tk_i) + \frac{\sigma_i^2}{2}(tk_i)^2\right]$$

எனவே,

$$M_Y(t) = \prod_{i=1}^{n} \exp\left[\mu_i(tk_i) + \frac{\sigma_i^2}{2}(tk_i)^2\right]$$
$$= \exp\left[\left(\sum_1^n k_i\mu_i\right)t + \frac{\left(\sum_1^n K_i\;\sigma_i^2\right)t^2}{2}\right]$$

இப்போது, $\sum_1^n K_i\;\mu_i$ ஐச் சராசரியாகவும்,

$\sum_1^n K_i^2\;\sigma_i^2$ ஐ மாறுபாடாகவும் கொண்ட இயல்நிலை மாறி

Z-ன் விலக்கப் பெருக்கத்தொகை

$$M_Z(t) = \exp\left[\left(\sum_1^n k_i\mu_i\right)t + \left(\sum_1^n K_i^2\sigma_i^2\right)t^2/2\right]$$

ஆகும்.

இப்போது, $M_Y(t) = M_Z(t)$ ஆக அமைவதால் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பு ராண்டம் மாறியின் பரவலைத் தனியொன்றாக வரையறுக்கும் பண்பின் வாயிலாக Y, Z ஆகிய மாறிகள் சமமானவை என்கிறோம். எனவே, $Y = \sum_1^n K_iX_i$ மாறியின் பரவல் $N\left(\sum_1^n K_i\,\mu_i, \sum_1^n K_i^2\,\sigma_i^2\right)$ இயல்நிலைப் பரவலாகும்.

எனில், அதன் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பு

$$M_Z(t) = E\{e^{tz}\}$$
$$= (1-2t)^{-2}, \qquad t < \tfrac{1}{2}$$

ஆகும்.

இப்போது,

$$M_Y(t) = M_Z(t), \qquad t < \tfrac{1}{2}$$

ஆக அமைவதால், விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு, ராண்டம் மாறியின் பரவலைத் தனியொன்றாக வரையறுக்கும் பண்பின் வாயிலாக, Y, Z ஆகிய மாறிகள் சமமானவை என்கிறோம். ஆகவே,

$$Y = \left(\frac{X_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{X_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2$$

மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{x}{4} e^{-\frac{x}{2}}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{மற்றபடி} \end{cases}$$

என அடைகிறோம்.

தேற்றம் 1

$X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ ஆகிய சார்பற்ற இயல்நிலை ராண்டம் மாறிகளின் பரவல்கள் முறையே $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $N(\mu_2, \sigma_2^2), \ldots\ldots, N(\mu_n, \sigma_n^2)$ எனவும், $K_1\ K_2, \ldots\ldots, K_n$ ஆகியன மெய்யான நிலையெண்கள் எனவும் கொள்வோமெனில், ராண்டம் மாறி $Y = K_1 X_1 + K_2 X_2 + \ldots\ldots + K_n X_n$ ஆனது ஓர் இயல்நிலை மாறியாகும். இதன் சராசரி $K_1 \mu_1 + K_2 \mu_2 + \ldots\ldots + K_n \mu_n$ ஆகவும், மாறுபாடு $K_1^2 \sigma_1^2 + K_2^2 \sigma_2^2 + \ldots\ldots + K_n^2 \sigma_n^2$ ஆகவும் அமைகின்றன.

தெரிப்பு

$X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ ஆகிய ராண்டம் மாறிகள் சார்பற்றவைகளாதலால், மாறி Y-ன் விலக்கப் பெருக்கத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு

$$M_Y(t) = E(e^{ty}) = E[e^{t(k_1x_1 + k_2x_2 + \ldots\ldots + k_nx_n)}]$$

$$= E(e^{tk_1x_1})\,E(e^{tk_2x_2}) \ldots\ldots E(e^{tk_n x_n})$$

$$= \prod_{i=1}^{n} E(e^{tk_i x_i})$$

இப்போது, X_i மாறியானது இயல்நிலை $N(\mu_i, \sigma_i^2)$ மாறியாவதால்,

$$E(e^{tx_i}) = \exp\left(t\mu_i + \frac{t^2\sigma_i^2}{2}\right), \; -\infty < t < \infty \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore \quad E(e^{tk_ix_i}) = \exp\left[\mu_i(tk_i) + \frac{\sigma_i^2}{2}(tk_i)^2\right]$$

எனவே,

$$M_Y(t) = \prod_{i=1}^{n} \exp\left[\mu_i(tk_i) + \frac{\sigma_i^2}{2}(tk_i)^2\right]$$

$$= \exp\left[\left(\sum_1^n k_i\mu_i\right)t + \frac{\left(\sum_1^n K_i\ \sigma_i^2\right)t^2}{2}\right]$$

இப்போது, $\sum_1^n K_i\ \mu_i$ ஐச் சராசரியாகவும்,

$\sum_1^n K_i^2\ \sigma_i^2$ ஐ மாறுபாடாகவும் கொண்ட இயல்நிலை மாறி

Z-ன் விலக்கப் பெருக்கத்தொகை

$$M_Z(t) = \exp\left[\left(\sum_1^n k_i\mu_i\right)t + \left(\sum_1^n K_i^2\sigma_i^2\right)t^2/2\right]$$

ஆகும்.

இப்போது, $M_Y(t) = M_Z(t)$ ஆக அமைவதால் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பு ராண்டம் மாறியின் பரவலைத் தனியொன்றாக வரையறுக்கும் பண்பின் வாயிலாக Y, Z ஆகிய மாறிகள் சமமானவை என்கிறோம். எனவே, $Y = \sum_1^n K_iX_i$ மாறியின் பரவல் $N\left(\sum_1^n K_i\mu_i, \sum_1^n K_i^2\sigma_i^2\right)$ இயல்நிலைப் பரவலாகும்.

துணைத் தேற்றம்

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ ஆகியன சராசரி μ ஐயும், மாறுபாடு σ^2ஐயும் கொண்ட இயல்நிலைப் பரவலிலிருந்து பெற்ற சமவாய்ப்புக் கூறு எனில், கூறு சராசரி $\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$-ன் பரவல் சராசரி μ, மாறுபாடு $\frac{\sigma^2}{n}$ ஆகியவைகளைக் கொண்ட இயல்நிலைப் பரவலாகும்.

தெரிப்பு

தேற்றம் 1இல் $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_n = \mu$, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_n^2 = \sigma^2$, $K_1 = K_2 = \ldots = K_n = \frac{1}{n}$ எனக் கொள்ளும்போது, $Y = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \bar{X}$-ன் பரவல், சராசரி μ, மாறுபாடு $\frac{\sigma^2}{n}$ ஆகியவைகளைக் கொண்ட இயல்நிலைப் பரவல் எனப் பெறுகிறோம்.

தேற்றம் 2

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ ஆகிய மாறிகள் இயல்நிலைப் பரவல் $N(\mu, \sigma^2)$ இலிருந்து பெற்ற சமவாய்ப்புக் கூறு எனில், கூறு சராசரி $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$, கூறு மாறுபாடு $S^2 = \frac{1}{n} \Sigma (X_i - \bar{X})^2$ ஆகியன சார்பற்ற மாறிகளாக அமைகின்றன.

தெரிப்பு

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ ஆகிய மாறிகள் சார்பற்றனவாதலால், அவைகளின் இணைந்த நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்

$$\phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{1}{\sigma^2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_2}\Sigma(x_i - \mu)^2\right\},$$

$$-\infty < x_i < \infty, \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

இப்போது,

$$Y_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}\left[(X_1 - \mu) + (X_2 - \mu) + \ldots + (X_n - \mu)\right]$$

$$Y_2 = \frac{1}{\sqrt{2 \times 1}}\left[(X_1 - \mu) - (X_2 - \mu)\right]$$

$$Y_3 = \frac{1}{\sqrt{3\times 2}}\left[(X_1-\mu) + (X_2-\mu) - 2(X_3-\mu)\right]$$

$$\vdots$$

$$Y_r = \frac{1}{\sqrt{r(r-1)}}\Big[(X_1-\mu) + (X_2-\mu) + \ldots + (X_{r-1}-\mu)$$

$$- (r-1)(X_r-\mu)\Big]$$

$$\vdots$$

$$Y_n = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}\left[(X_1-\mu) + \ldots + (X_{n-1}-\mu) - (n-1)(X_n-\mu)\right]$$

ஆகிய புதிய மாறிகளை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ மாறிகளின் வெளி

$$A = \{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) : \ -\infty < x_i < \infty, \quad i = 1, 2, \ldots, n \}$$

எனில், $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ மாறிகளின் வெளி

$$B = \{ (y_1, y_2, \ldots, y_n) : \ -\infty < y_i < \infty, \quad i = 1, 2, \ldots, n \}$$

ஆகும்.

இப்போது, $y_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}\left[(x_1-\mu) + (x_2-\mu) + \ldots + (x_n-\mu)\right]$

$$y_r = \frac{1}{\sqrt{r(r-1)}}\Big[(x_1-\mu) + (x_2-\mu) + \ldots + (x_{r-1}-\mu)$$

$$- (r-1)(x_r-\mu)\Big], \quad r = 2, 3, \ldots, n$$

ஆகிய சார்புகள் A, B ஆகிய இரு கணப்பகுதிகளின் ஒன்றுக்கொன்றான உருமாற்றமாகும். மேலும் இவ்வுருமாற்றம் செங்குத்தானதாகவும் அமைகிறது.

இச்சார்புகளின் எதிர்மாறான சார்புகள்,

$$(x_1-\mu) = v_1(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}(y_1 - y_2 + \ldots + y_n)$$

$$(x_r-\mu) = v_r(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \frac{1}{\sqrt{r(r-1)}}(y_1 + y_2 + \ldots + y_{r-1} - y_r),$$

$$r = 2, 3, \ldots, n$$

எனவும், உருமாற்றத்தின் ஜாக்கோபியன்,

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \cdots\cdots\cdots & \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \frac{1}{\sqrt{2\cdot1}} & -\frac{1}{\sqrt{2\cdot1}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3\cdot2}} & \frac{1}{\sqrt{3\cdot2}} & -\frac{2}{\sqrt{3\cdot2}} & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ \frac{1}{\sqrt{r(r-1)}} & \frac{1}{\sqrt{r(r-1)}} & \cdots\cdots\cdots & -\frac{(r-1)}{r(r-1)} & 0 \\ \vdots & & & & \\ \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \cdots\cdots\cdots & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \frac{-(n-1)}{\sqrt{n(n-1)}} \end{vmatrix}$$

$$= \pm 1$$

எனவும் பெறுகிறோம்.

இப்போது, X, Y ஆகிய மாறிகளின் உருமாற்றம் செங்குத்தாக அமைவதால்

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

எனப் பெறுகிறோம்.

ஆகவே, Y_1, Y_2, ... , Y_n மாறிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $g(y_1, y_2, \ldots, y_n) = |J| \, \phi[v_1, v_2, \ldots, v_n]$

$$g(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sigma^n}$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2)\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y_1^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \sigma^{n-1}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{2}^{n} y_i^2}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{\frac{-y_1'^2}{2\sigma^2}} \right\}$$ ஆகும்.

இப்போது,

$$g(y_1, y_2, \ldots, y_n) = h_1(y_1), h_2(y_2), \ldots, h_n(y_n)$$

எனக் குறிப்பிடும்போது,

$$h_i(y_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{y_1'^2}{2\sigma^2}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

ஆகின்றன.

எனவே, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ ஆகியன சார்பற்ற இயல்நிலை $N(0, \sigma^2)$ மாறிகளாகின்றன.

$$\text{இப்போது, } Y_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}[(x_1-\mu) + (x_2-\mu) + \ldots + (x_n-\mu)]$$
$$= \sqrt{n}\,(\bar{X}-\mu)$$

ஆகும். மேலும்

$$Y_1^2 + Y_2^2 + \ldots + Y_n^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$$

ஆக அமைவதால்,

$$Y_2^2 + Y_3^2 + \ldots + Y_n^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 - Y_1^2$$
$$= \sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 - n(\bar{X}-\mu)^2$$
$$= \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$
$$= n\,S^2$$

ஆகும்.

மாறி Y_1 ஆனது கூறு சராசரி $\bar{X}$-ன் சார்பாகவும், கூறுமாறுபாடு S^2 ஆனது மாறிகள் $Y_2, \ldots, Y_n$ ஆகியவைகளின் சார்பாகவும் அமைகின்றன. $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ ஆகிய மாறிகள் சார்பற்றனவாதலால், கூறு அளவைகள் $\bar{X}, S^2$ ஆகியன சார்பற்ற மாறிகளாகின்றன என்கிறோம்.

ஏராண்டம் மாறிகளின் சார்புகளின் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு (Expectation of Functions of Random Variables)

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ ஆகிய மாறிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல், $f(x_1\, x_2 \ldots x_n)$ என்போம். இப்போது,

$Y = \phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ சார்பின் நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல் $g_y(y)$ எனில், Y-ன் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு

$$E(y) = \int y\, g_y(y)\, dy$$ ஆகும்.

Y-ன் நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல் $g_y(y)$ஐ வெளிப்படையாகப் பெறுமலிருக்கும்போது,

$$E(y) = \underbrace{\int\int\cdots\int}_{n \text{ முறைகள்}} \phi(x_1\, x_2 \ldots x_n) f(x_1\, x_2 \ldots x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

எனக் குறிப்பிடுகிறோம்.

தேற்றம் 3

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ ஆகிய ராண்டம் மாறிகளின் சராசரி முறையே $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ எனவும், மாறுபாடு முறையே $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2$ எனவும், X_i, X_j ஆகிய இணைந்த மாறிகளின் ஒட்டுறவுக்கெழு ρ_{ij}, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ எனவும் கொள்வோம். $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ஆகிய n மெய்யெண்களை எடுத்துக்கொண்டு

$$Y = \rho_1 X_1 + \rho_2 X_2 + \ldots + \rho_n X_n$$ என

Y மாறியை வரையறுப்போம். இப்போது Y-மாறியின் சராசரி, மாறுபாடு ஆகியவைகள் முறையே

$$E(Y) = C_1 \mu_1 + C_2 \mu_2 + \ldots + C_k \mu_k$$

$$V(Y) = \sum_1^n C_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i \neq j} \sum C_i C_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$$

ஆகின்றன.

தெரிப்பு

Y-மாறியின் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு

$$E(Y) = \underbrace{\int\cdots\int}_{n \text{ முறைகள்}} (C_1 x_1 + C_2 x_2 + \ldots + C_n x_n) f(x_1\, x_2 \ldots x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

$$= \sum_{i=1}^n C_i \underbrace{\int \cdots \int}_{n \text{ முறைகள்}} x_i f(x_1\, x_2 \ldots x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx$$

$$= \sum_1^n C_i \int x_i f_i(x_i)\, dx_i$$

$$\left[\because \underbrace{\int \ldots \int}_{(n-1)\text{ முறைகள்}} f(x_1\, x_2 \ldots x_n)\, dx_1 \ldots dx_{i-1}\, dx_{i+1} \ldots dx_n = f_i(x_i)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} C_i\, E(X_i)$$

$$= C_i\, \mu_i \text{ ஆகும்.}$$

Y-மாறியின் மாறுபாடு

$$V(Y) = E[Y - E(Y)]^2 = E[\Sigma\, C_i\, (X_i - \mu_i)]^2$$

$$= E\left\{\sum_{1}^{n} C_i^2\, (X_i - \mu_i)^2 + \sum_{i \neq j}\sum C_i\, C_j\, (X_i - \mu_i)\, (X_j - \mu_j)\right\}$$

$$= \underbrace{\int \ldots \int}_{n\text{ முறைகள்}} \left\{\sum_{1}^{n} C_i^2\, (X_i - \mu_i)^2 + \sum_{i \neq j}\sum C_i\, C_j\, (X_i - \mu_i)\, (X_j - \mu_j)\right\} f(x_1\, x_2 \ldots x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

$$= \sum_{1}^{n} C_i^2 \underbrace{\int \ldots \int}_{n\text{ முறைகள்}} (x_i - \mu_i)^2 f(x_1\, x_2 \ldots x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

$$+ \sum_{i \neq j}\sum C_i\, C_j \underbrace{\int \ldots \int}_{n\text{ முறைகள்}} (x_i - \mu_i)\, (x_j - \mu_j)\, f(x_1\, x_2 \ldots x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$$

இப்போது

(i) $$\underbrace{\int \ldots \int}_{(n-1)\text{ முறைகள்}} f(x_1\, x_2 \ldots x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_{i-1}\, dx_{i+1} \ldots dx_n$$

தொகையானது X_i-மாறியின் இறுதிநிலைப் பரவல் $f_i(x_i)$

(ii) $$\underbrace{\int \ldots \int}_{(n-2)\text{ முறைகள்}} f(x_1\, x_2 \ldots x_n)\, dx_1 \ldots dx_{i-1}\, dx_{i+1} \ldots dx_{j-1}\, dx_{j+1} \ldots dx_n$$

தொகையானது X_i, X_j ஆகிய இரு மாறிகளின் இணைந்த இறுதிநிலைப் பரவல் $f_{ij}(x_i\, x_j)$ ஆகின்றன.

எனவே,

$$\underbrace{\int \cdots \int}_{n \text{ முறைகள்}} (x_i - \mu_i)^2 f(x_1\, x_2 \ldots x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

$$= \int (x_i - \mu_i)^2 f_i(x_i)\, dx_i$$

$$= \sigma_i^2, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

$$\underbrace{\int \cdots \int}_{n \text{ முறைகள்}} (x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j) f(x_1\, x_2 \ldots x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

$$= \int\int (x_i - \mu_i)(x_i - \mu_j) f_{ij}(x_i, x_j)\, dx_i\, dx_j$$

$$= \rho_{ij}\, \sigma_i\, \sigma_j, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

ஆகின்றன.

இப்போது,

$$V(Y) = \sum_1^n C_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i \neq j}\sum C_i\, C_j\, \rho_{ij}\, \sigma_i\, \sigma_j$$

ஆகும்.

துணைத் தேற்றம்

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ ஆகிய மாறிகள் சராசரி μ, மாறுபாடு σ^2 ஆகியவைகளைக் கொண்ட பரவலிலிருந்து பெற்ற சம வாய்ப்புக் கூறு எனில், கூறு சராசரியின்

$$\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_1^n X_i$$

எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு $E(\bar{X}) = \mu$, மாறுபாடு

$$V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \text{ ஆகின்றன.}$$

தெளிப்பு

இங்கு
$$\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_n = \mu$$
$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_n^2 = \sigma^2$$
$$C_1 = C_2 = \ldots = C_n = \frac{1}{n}$$
$$\rho_{ij} = 0, \; i \neq j, \; i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

$$\text{எனவே,} \quad E(\overline{X}) = \sum_{1}^{n} C_i \mu_i = \mu$$

$$V(\overline{X}) = \sum_{1}^{n} C_i^2 \sigma_i^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

ஆகின்றன.

குறிப்பு

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ ஆகியவைகள் இயல்நிலைப் பரவல் $N(\mu, \sigma^2)$ பெற்ற சமவாய்ப்புக் கூறு எனில், கூறு சராசரி $\overline{X}$-ன் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு μ, மாறுபாடு $\frac{\sigma^2}{n}$ எனத் தேற்றம் 1-ல் கண்டோம்.

இப்போது, தேற்றம் 3 வாயிலாக $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ஆகியவைகள் இயல்நிலைப் பரவல் அல்லாது வேறு பரவலிலிருந்து பெற்ற சமவாய்ப்புக் கூறு எனினும் பரவலின் சராசரி μ, மாறுபாடு σ^2 ஆகியவைகள் உளதாயிருப்பின், கூறு சராசரி $\overline{X}$-ன் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு μ, மாறுபாடு $\frac{\sigma^2}{n}$ ஆக அமைகின்றன என்பதைத் தெளிவாகக் கருத்தில் கொள்ளவேண்டும்.

வரிசைக் கூறு அளவைகளின் பரவல்கள் (Distribution of Order Statistics)

தொடர்ச்சியான மாறி X-ன் நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்

$$f(x) \begin{cases} > 0\,; & a < x < b \\ = 0\,; & \text{மற்றபடி} \end{cases}$$

எனவும், $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ ஆகிய n மாறிகள் X-பரவலிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட சமவாய்ப்புக் கூறு எனவும் கொள்வோம். $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ ஆகிய மாறிகளை அவைகளின் கண்டறிந்த மதிப்புகள் வாயிலாக ஏறு வரிசையில் அமைத்து, மிகச் சிறிய மாறியை Y_1 எனவும், அதற்கு அடுத்த பெரிய மாறியை Y_2 எனவும், ……, மிகப் பெரிய மாறியை Y_n எனவும் குறிப்பிடும் போது

$$Y_1 < Y_2 < Y_3 < \ldots\ldots < Y_n$$

எனப் பெறுகிறோம்.

$Y_1, Y_2, \ldots\ldots, Y_n$ ஆகிய மாறிகளை $X_1, X_2 \ldots\ldots, X_n$ ஆகிய சமவாய்ப்புக் கூறின் **வரிசைக் கூறு அளவைகள்** (Order Statistics) எனவும், Y_iஐ $(i = 1, 2, \ldots\ldots, n)$ i-வது வரிசை அளவை (i-th Order Statistics) எனவும் வழங்குகிறோம்.

$Y_1, Y_2, \ldots\ldots, Y_n$ ஆகிய வரிசை அளவை மாறிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்

$$g(Y_1, Y_2, \ldots\ldots, Y_n) = n\,!\, f(Y_1) f(Y_2) f(Y_3) \ldots\ldots f(Y_n)\ ; \quad a < Y_1 < Y_2 \ldots\ldots < Y_n < b$$
$$= 0, \qquad \text{மற்றபடி}$$

ஆகும்.

இப்போது $n = 3$ எனக்கொண்டு Y_1, Y_2, Y_3 ஆகிய வரிசை அளவை மாறிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவுப் பரவல்

$$g(Y_1, Y_2, Y_3) = 3\,!\, f(Y_1)\ f(Y_2)\ f(Y_3);\ a < Y_1 < Y_2 < Y_3 < b$$
$$= 0, \qquad \text{மற்றபடி}$$

ஆகும் என்பதை நிறுவுவோம்.

$$P_r(a < X_1 = X_2 < b,\ \ a < x_3 < b)$$

$$= \int_a^b \int_a^b \int_{x_2}^{x_2} f(X_1)\, f(X_2)\, f(X_3)\ dx_1\, dx_2\, dx_3$$

$$= 0, \quad \therefore \int_{x_2}^{x_2} f(X_1)\, dx_1 = 0$$

எனவே X_1, X_2, X_3 ஆகிய மாறிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவுப் பரவலை வேறுபடுத்தாத வகையில் x_1, x_2, x_3 ஆகிய மூன்று அச்சுத் தூரங்களில் ஏதேனும் இரு தூரங்கள் சமமாக அமையும்போது அப் புள்ளிகளுக்கு இணையான நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு மதிப்பு $f(X_1)\ f(X_2)\ f(X_3) = 0$ எனக் கொள்வோம்.

X_1, X_2, X_3 ஆகிய மாறிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவுப் பரவல் சார்பின் மதிப்பு பூச்சியத்திற்குக் கூடுதலாக அமையும் வெளி S-ஆனது கீழ்க்கண்ட 6 பிரிந்த கணப்பகுதிகளின் கூடிய கணமாகும்

$$S_1 = [(x_1, x_2, x_3) \; ; \; a < x_1 < x_2 < x_3 < b]$$
$$S_2 = [(x_1, x_2, x_3) \; ; \; a < x_2 < x_1 < x_3 < b]$$
$$S_3 = [(x_1, x_2, x_3) \; ; \; a < x_1 < x_3 < x_2 < b]$$
$$S_4 = [(x_1, x_2, x_3) \; ; \; a < x_2 < x_3 < x_1 < b]$$
$$S_5 = [(x_1, x_2, x_3) \; ; \; a < x_3 < x_1 < x_2 < b]$$
$$S_6 = [(x_1, x_2, x_3) \; ; \; a < x_3 < x_2 < x_1 < b]$$

x_1, x_2, x_4 ஆகிய மூன்று எண்களை ஏறுவரிசையில் $3! = 6$ வழிகளில் வரிசைப்படுத்த இயலும். ஆகையால் கூறுவெளி S-யை ஆறு பிரிந்த கணப் பகுதிகளின் கூடிய கணமாக அமைக்கிறோம்.

இப்போது $y_1 = (x_1, x_2, x_3)$ ஆகிய மூன்று மதிப்புகளில் மிகச் சிறியது, $y_2 = (x_1, x_2, x_3)$ ஆகிய மூன்று மதிப்புகளில் நடு மதிப்புடையது, $y_3 = (x_1, x_2, x_3)$ ஆகிய மூன்று மதிப்புகளில் மிகப் பெரியது என மூன்று சார்புகளையும், கணப்பகுதி

$$B = \{ (y_1, y_2, y_3) \; : \; a < y_1 < y_2 < y_3 < b \}\text{-யையும்}$$

எடுத்துக் கொள்வோம்.

y_1, y_2, y_3 ஆகிய சார்புகள் S_1, B ஆகிய இரு கணப்பகுதிகளின் ஒன்றுக்கொன்றான உருமாற்றமாகும். இந்த உருமாற்றத்தின் எதிர்மாறான சார்புகள்

$$x_1 = y_1 \; ; \quad x_2 = y_2 \; ; \quad x_3 = y_3 \quad \text{ஆகின்றன.}$$

உருமாற்றத்தின் ஜாக்கோபியின்

$$J_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

ஆகும்.

y_1, y_2, y_3 ஆகிய சார்புகள் $S_2, S_3, \ldots\ldots, S_6$ ஆகிய ஒவ்வொரு பகுதியையும், B கணப்பகுதியுடன் இணைக்கும் ஒன்றுக்கொன்றான உருமாற்றமாகவும், ஒவ்வோர் உருமாற்றத்தின் ஜாக்கோபியன் மதிப்பும் 1 ஆகவும் அமைகின்றன.

ஆகவே Y_1, Y_2, Y_3 ஆகிய மூன்று மாறிகளை

$Y_1 = (X_1, X_2, X_3)$ ஆகியவைகளில் மிகச் சிறியது

$Y_2 = (X_1, X_2, X_3)$ ஆகியவைகளில் நடுவானது

$Y_3 = (X_1, X_2, X_3)$ ஆகியவைகளில் மிகப் பெரியது

எனக் கொள்ளும்போது இவைகளின் இணைந்த நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்

$$g(y_1, y_2, y_3) = |J_1|\, f(y_1)\cdot f(y_2)\cdot f(y_3) + |J_2|\, f(y_2)\cdot f(y_1)\cdot f(y_3) + \ldots\ldots\ldots\ldots + |J_6|\, f(y_3)\cdot f(y_2)\cdot f(y_1)\,; \quad a < y_1 < y_2 < y_3 < b$$

$$= 3\,!\, f(y_1)\cdot f(y_2)\cdot f(y_3)\,;\ a < y_1 < y_2 < y_3 < b$$

$$= 0, \qquad \text{மற்றபடி}$$

ஆகும்.

தேற்றம்

தொடர்ச்சியான மாறி X-ன் நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்

$$f(x) > 0 \quad ; \quad a < x < b$$
$$f(x) = 0 \quad ; \quad \text{மற்றபடி}$$

எனவும், X-பரவலிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட சம வாய்ப்புக் கூறு கொண்டு பெற்ற வரிசைக் கூறு அளவை மாறிகள் $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots\ldots, Y_n$ எனவும் கொள்வோம்.

(i) n-ஆவது வரிசைக் கூறு அளவை மாறி Y_n-ன் அதாவது, கூறின் மீப்பெரும் மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்

$$g_n[V_n] = n\,[F(y_n)]^{n-1} f(y_n),\ a < y_n < b$$
$$= 0, \qquad \text{மற்றபடி}$$

(ii) முதலாவது வரிசைக் கூறு அளவை மாறி Y_1-ன் அதாவது, கூறின் மீச்சிறு மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்

$$g_1(Y_1) = n\,[1 - F(y_1)]^{n-1}\ f(y_1)\,;\quad a < y_1 < b$$
$$= 0, \qquad \text{மற்றபடி}$$

(iii) $1 < i < n$ என அமையும்போது, i-ஆவது வரிசைக் கூறு அளவை மாறி Y_i-யின் நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்

$$g_i(y_i) = \frac{n\,!}{(i-1)\,!\,(n-i)\,!}\,[F(y_i)]^{i-1}\,[1 - F(y_i)]^{n-i}\ f(y_i)\,; \quad a < y_i < b$$

$$= 0, \qquad \text{மற்றபடி}$$

(iv) $1 < i < j < n$ என அமையும்போது, i-ஆவது, j-ஆவது வரிசைக் கூறு அளவை மாறிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்

$$g_{ij}(y_i, y_j) = \frac{n!}{(i-1)!\,(j-i-1)!\,(n-j)!} \times$$

$$[F(y_i)]^{i-1}\,[F(y_j) - F(y_i)]^{j-i-1}\,[1 - F(y_j)]^{n-j} f(y_i)\, f(y_j);$$

$$a < y_i < y_j < b$$

$$= 0, \qquad \text{மற்றபடி}$$

ஆகின்றன.

தெரிப்பு

(i) வரிசைக் கூறு அளவை மாறிகள் $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots, Y_n$ ஆகியவைகளின் இணைந்த நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்,

$$g(y_1, y_2, \ldots, y_n) = n!\, f(y_1)\, f(y_2) \ldots f(y_n);$$

$$a < y_1 < y_2 \ldots < y_n < b$$

$$= 0, \qquad \text{மற்றபடி}$$

ஆகும்.

n-ஆவது வரிசை மாறி Y_n-ன் பரவலானது, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ ஆகிய வரிசை மாறிகளின் இணைந்த பரவலிலிருந்து பெறும் இறுதிநிலை மாறியின் பரவலாகும்.

$$g_n(y_n) = \int_a^{y_n}\int_a^{y_{n-1}}\cdots\int_a^{y_3}\int_a^{y_2} n!\, f(y_1)\, f(y_2) \ldots f(y_n)\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_{n-1}$$

$$= \int_a^{y_n}\int_a^{y_{n-1}}\cdots\int_a^{y_3} n!\left[\int_a^{y_2} f(y_1)\, dy_1\right] f(y_2) \ldots f(y_n)\; dy_2\, dy_3 \ldots dy_{n-1}$$

$$= \int_a^{y_n}\int_a^{y_{n-1}}\cdots\int_a^{y_3} n!\; F(y_2)\, f(y_2) \ldots f(y_n)\, dy_2 \ldots dy_{n-1}$$

இப்போது,

$$\int_a^{y_3} F(y_2)\, f(y_2)\, dy_2 = \left[\frac{\{F(y_2)\}^2}{2}\right]_a^{y_3}$$

$$= \frac{[F(y_3)]^2}{2} \qquad \therefore\; F(a) = 0.$$

எனவே,

$$g_n(y_n) = \int_a^{y_n}\int_a^{y_{n-1}}\cdots\int_a^{y_4} n!\,\frac{[F(y_3)]^2}{2} f(y_3)\,f(y_4)\cdots f(y_n)\,dy_3\,dy_4\cdots dy_n$$

இப்போது,

$$\int_a^{y_4}\frac{[F(y_3)]^2}{2} f(y_3)\,dy_3 = \left[\frac{\{F(y_3)\}^3}{2\cdot 3}\right]_a^{y_4}$$

$$= \frac{[F(y_4)]^3}{\lfloor 3}$$

ஆகவே,

$$g_n(y_n) = \int_a^{y_n}\int_a^{y_{n-1}}\cdots\int_a^{y_5} n!\,\frac{[F(y_4)]^3}{3!} f(y_4)\cdots f(y_n)\,dy_4\cdots dy_{n-1}$$

$y_4, y_5, \ldots, y_{n-1}$ ஆகிய மாறிகளைக் குறித்து அடுத்து அடுத்து தொகை காணும்போது,

$$g_n(y_n) = n!\,\frac{[F(y_n)]^{n-1}}{(n-1)!} f(y_n)$$

$$= n[F(y_n)]^{n-1} f(y_n)\,; \quad a < y_n < b$$

$$= 0, \quad \text{மற்றபடி}$$

ஆகும்.

(ii) முதலாவது வரிசைமாறி Y_1-ன் பரவலானது, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ ஆகிய வரிசை மாறிகளின் இணைந்த பரவலிலிருந்து பெறும் இறுதி நிலைப் பரவலாகும்.

$$g_1(y_1) = \int_{y_1}^{b}\int_{y_2}^{b}\cdots\int_{y_{n-2}}^{b}\int_{y_{n-1}}^{b} n!\,f(y_1)\,f(y_2)\cdots f(y_n)\,dy_n\cdots dy_2$$

$$= \int_{y_1}^{b}\int_{y_2}^{b}\cdots\int_{y_{n-2}}^{b} n!\left[\int_{y_{n-1}}^{b} f(y_n)\,dy_n\right] f(y_1)\,f(y_2)\cdots f(y_{n-1})\,dy_{n-1}\cdots dy_2$$

$$= \int_{y_1}^{b}\int_{y_2}^{b}\cdots\int_{y_{n-2}}^{b} n!\left[1-F(y_{n-1})\right] f(y_1)\,f(y_2)\cdots f(y_{n-1})\,dy_{n-1}\cdots dy_2$$

$$\therefore \int_{y_{n-1}}^{b} f(y_n)\,dy_n = \Big[F(y_n)\Big]_{y_{n-1}}^{b} = F(b) - F(y_{n-1})$$
$$= 1 - F(y_{n-1})$$

$$= \int_{y_1}^{b} \cdots \int_{y_{n-3}}^{b} n!\left[\int_{y_{n-2}}^{b} \{1 - F(y_{n-1})\} f(y_{n-1})\,dy_{n-1}\right] \times f(y_1) \ldots f(y_{n-2})\,dy_2\,dy_3 \ldots dy_{n-2}$$

இப்போது

$$\int_{y_{n-2}}^{b} [1 - F(y_{n-1})]\, f(y_{n-1})\,dy_{n-1}$$

$$= \left[-\frac{\{1 - F(y_{n-1})\}^2}{2}\right]_{y_{n-2}}^{b} = \frac{[1 - F(y_{n-2})]^2}{2}$$

எனவே

$$g_1(y_1) = \int_{y_1}^{b} \ldots \int_{y_{n-3}}^{b} n!\, f(y_1) \ldots f(y_{n-2}) \times \frac{[1 - F(y_{n-2})]^2}{2}\, dy_{n-2} \ldots dy_1$$

$y_{n-2}, y_{n-3}, \ldots, y_2$ ஆகிய மாறிகளைக் குறித்து அடுத்தடுத்து தொகை காணும்போது

$$g_1(y_1) = n[1 - F(y_1)]^{n-1} f(y_1), \quad a < y_1 < b$$
$$= 0, \qquad \text{மற்றபடி}$$

ஆகும்.

(iii) i-ஆவது வரிசைமாறி Y_i-யின் நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவலானது, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ ஆகிய வரிசை மாறிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவலின் இறுதிநிலைப் பரவலாகும்.

$$g_i(y_i) = \int_a^{y_i}\int_a^{y_{i-1}} \ldots \int_a^{y_3}\int_a^{y_2}\int_{y_i}^{b}\int_{y_{i+1}}^{b} \ldots \int_{y_{n-1}}^{b} n! \times f(y_1)\, f(y_2) \ldots f(y_n)\, dy_n\, dy_{n-1} \ldots dy_{i+1}\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_{i-1}$$

இப்போது $\int_{y_{n-1}}^{b} f(y_n)\,dy_n = 1 - F(y_{n-1})$

$$\int_{y_{n-2}}^{b} \int_{y_{n-1}}^{b} f(y_n) f(y_{n-1})\, dy_n\, dy_{n-1} = \int_{y_{n-2}}^{b} \{ 1 - F(y_{n-1}) \} f(y_{n-1})\, dy_{n-1}$$

$$= \frac{\{ 1 - F(y_{n-2}) \}^2}{2}$$

ஆகின்றன.

$y_n, y_{n-1}, \ldots, y_{i+1}$ ஆகிய மாறிகளைக் குறித்து அடுத்தடுத்து தொகை காணும்போது,

$$\int_{y_i}^{b} \int_{y_{i+1}}^{b} \cdots\cdots \int_{y_{n-1}}^{b} f(y_n) f(y_{n-1}) \ldots f(y_{i+2}) f(y_{i+1})\, dy_n\, dy_{n-1} \ldots dy_{i+2}\, dy_{i+1}$$

$$= \frac{\{ 1 - F(y_i) \}^{n-i}}{(n-i)!}$$

ஆகும்.

இப்போது,

$$\int_{a}^{y_2} f(y_1)\, dy_1 = F(y_2)$$

$$\int_{a}^{y_3} \int_{a}^{y_2} f(y_1) f(y_2)\, dy_1\, dy_2 = \int_{a}^{y_3} \{ F(y_2) \} f(y_2)\, dy_2$$

$$= \frac{\{ F(y_3) \}^2}{2!}$$

ஆகின்றன.

$y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}$ ஆகிய மாறிகளைக் குறித்து அடுத்தடுத்து தொகை காணும்போது,

$$\int_{a}^{y_i} \int_{a}^{y_{i-1}} \cdots\cdots \int_{a}^{y_3} \int_{a}^{y_2} f(y_1) f(y_2) \ldots f(y_{i-1})\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_{i-1}$$

$$= \frac{[F(y_i)]^{i-1}}{(i-1)!}$$

ஆகும்.

எனவே,

$$g_i(y_i) = \frac{n!}{(i-1)!\,(n-2)!}\{F(y_i)\}^{i-1}[1-F(y_i)]^{n-i} f(y_i), \quad a < y_i < b$$

$$= 0, \qquad \text{மற்றபடி}$$

ஆகும்.

(iv) $i < j$ என அமையும் i ஆவது, j ஆவது வரிசை மாறிகள் Y_i, Y_j களின் இணைந்த நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவலானது $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ ஆகிய வரிசை மாறிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவலின் இறுதிநிலைப் பரவலாகும்.

$$g_{ij}(y_i\, y_j) = \int_a^{y_i}\int_a^{y_{i-1}}\cdots\int_a^{y_2}\int_{y_i}^{y_j}\int_{y_{i+1}}^{y_j}\cdots\cdots\int_{y_{j-2}}^{y_j}\int_{y_j}^{b}\cdots\int_{y_{n-2}}^{b}\int_{y_{n-1}}^{b}$$

$$\times f(y_i)\ldots f(y_n)\; dy_n\; dy_{n-1}\ldots dy_{j+1}\; dy_{j-1}\ldots dy_{i+1}\; dy_1\ldots dy_{i-1}.$$

இப்போது,

$$\int_{y_j}^{b}\int_{y_{j+1}}^{b}\cdots\int_{y_{n-2}}^{b}\cdots\int_{y_{n-1}}^{b} f(y_n)f(y_{n-1})\ldots f(y_{j+1})\; dy_n\; dy_{n-1}\ldots dy_{j+1}$$

$$= \frac{[1-F(y_j)]^{n-j}}{(n-j)!}$$

$$\int_a^{y_i}\int_a^{y_{i-1}}\cdots\int_a^{y_2} f(y_1)\,f(y_2)\ldots f(y_{i-1})\; dy_1\; dy_2\ldots dy_{i-1}$$

$$= \frac{[F(y_i)]^{i-1}}{(i-1)!}$$

ஆகின்றன.

$$\int_{y_{j-2}}^{y_j} f(y_{j-1})\, dy_{j-1} = \Big[\, F(y_{j-1}) \,\Big]_{y_{j-2}}^{y_j} = F(y_j) - F(y_{j-2})$$

$$\int_{y_{j-3}}^{y_j}\int_{y_{j-2}}^{y_j} f(y_{j-1})\, f(y_{j-2})\; dy_{j-1}\; dy_{j-2}$$

$$= \int_{y_{j-2}}^{y_j} [F(y_j) - F(y_{j-2})] f(y_{j-2})\, dy_{j-2}$$

$$= \left[\frac{\{F(y_j) - F(y_{j-2})\}^2}{2} \right]_{y_{j-2}=y_{j-3}}^{y_{j-2}=y_j}$$

$$= \frac{\{F(y_j) - F(y_{j-3})\}^2}{2}$$

இது போன்று, $y_{j-3}, y_{j-4}, \ldots, y_{i+1}$ ஆகிய மாறிகளைக் குறித்து அடுத்தடுத்து தொகை காணும்போது,

$$\int_{y_i}^{y_j} \int_{y_{i+1}}^{y_j} \cdots \int_{y_{j-2}}^{y_j} f(y_{j-1}) f(y_{j-2}) \cdots f(y_{i+1})\, dy_{j-1}\, dy_{j-2} \ldots dy_{i+1}$$

$$= \frac{\{F(y_j) - F(y_i)\}^{j-i-1}}{(j-i-1)!}$$

ஆகும்.

எனவே,

$$g_{ij}(y_i, y_j) = \frac{n!}{(i-1)!\,(j-i-1)!\,(n-j)!}$$

$$\times \left[F(y_i) \right]^{i-1} \left[F(y_j) - F(y_i) \right]^{j-i-1} \left[1 - F(y_j) \right]^{n-j}$$

$$\times f(y_i) f(y_j), \quad a < y_i < y_j < b$$

$$= 0, \quad \text{மற்றபடி}$$

ஆகும்.

கணக்கு :

X மாறியின் பரவல்

$$f(x) = 3x^2, \quad 0 < x < 1$$
$$= 0, \quad \text{மற்றபடி}$$

எனவும், $Y_1 < Y_2 < Y_3 < Y_4 < Y_5$ ஆகியவைகள் X பரவலிலிருந்து பெற்ற வரிசைக் கூறு அளவை மாறிகள் எனவும் கொள்வோம்.

(i) Y_1 மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்

$$\begin{aligned} g_1(t) &= 5\,[1-F(t)]^4 f(t) &&, \quad 0 < t < 1 \\ &= 5\,(1-t^3)^4\, 3t^2 &&, \quad 0 < t < 1 \\ &= 15\, t^2\, (1-t^3)^4 &&, \quad 0 < t < 1 \\ &= 0, && \text{மற்றபடி} \end{aligned}$$

ஆகும்.

(ii) Y_5 மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்

$$\begin{aligned} g_5(t) &= 5\,[F(t)]^4 f(t) &&, \quad 0 < t < 1 \\ &= 5\,t^{12}\,(3t^2) &&, \quad 0 < t < 1 \\ &= 15\, t^{14} &&, \quad 0 < t < 1 \\ &= 0, && \text{மற்றபடி} \end{aligned}$$

ஆகும்.

(iii) Y_3 மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்,

$$\begin{aligned} g_3(t) &= \frac{5!}{2!\,2!}\,[F(t)]^2\,[1-F(t)]^2 f(t), \quad 0 < t < 1 \\ &= 45\, t^8\, (1-t^3)^2 \quad , \quad 0 < t < 1 \\ &= 0 \quad , \qquad \text{மற்றபடி} \end{aligned}$$

ஆகும்.

(iv) Y_2, Y_4 ஆகிய மாறிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவுப் பரவல்,

$$\begin{aligned} g_{24}(t, u) &= \frac{5!}{1!\,1!\,1!}\,[F(t)]\;[F(u)-F(t)] \\ &\qquad \times [1-F(u)]\; f(t)\, f(u), \\ &\qquad\qquad 0 < t < u < 1 \\ &= 1080\, t^5\, (u^3-t^3)\,(1-u^3)\, u^2, \quad 0 < t < u < 1 \\ &= 0, \qquad \text{மற்றபடி} \end{aligned}$$

ஆகும்.

கணக்கு

$Y_1 < Y_2 < Y_3 < Y_4$ ஆகிய வரிசை மாறிகள் கீழ்க்கண்ட பரவலிலிருந்து பெற்றவைகள் எனக் கொள்வோமெனில்,

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-x} \; ; \quad 0 < x < \infty \\ &= 0, \qquad \text{மற்றபடி} \end{aligned}$$

Y_2, $(Y_4 - Y_2)$ ஆகியன சார்பற்றனவாக அமைகின்றன என்பதைக் காண்க,

முறை

Y_2, Y_4 ஆகிய மாறிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்.

$$g_{2,4}(y_2, y_4) = \frac{4!}{1!\,1!\,0!}[F(y_2)]\,[F(y_4) - F(y_2)] \times f(y_2)f(y_4)\ ;\ 0 < y_2 < y_4 < \infty$$

$$= 24(1-e^{-y_2})(e^{-y_2} - e^{-y_4})e^{-y_2}e^{-y_4},\quad 0 < y_2 < y_4 < \infty$$

இப்போது

$$Z_1 = Y_2\ ;\ Z_2 = Y_4 - Y_2$$

எனக் கொள்வோம்.

$z_1 = Y_2\ ;\ z_2 = y_4 - y_2$ எனும் சார்புகள்
கணம் $A = [(y_2, y_4) = 0 < y_2 < y_4 < \infty]$
கணம் $B = [(z_1, z_2) = 0 < z_1 < \infty\ ;\ 0 < z_2 < \infty]$

ஆகியவைகளின் ஒன்றுக்கொன்றான உருமாற்றமாகும். இந்த உருமாற்றத்தின் எதிர்மாறான சார்புகள்

$$y_2 = z_1\ ;\ y_4 = z_1 + z_2 \text{ ஆகவும்,}$$

ஜாக்கோபியன் $J = 1$ ஆகவும் அமைகின்றன.

Z_1, Z_2 ஆகிய மாறிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவுப் பரவல்,

$$h(z_1, z_2) = 24\,e^{-3z_1}(1-e^{-z_1})e^{-z_2}(1-e^{-z_2})\ ;\quad 0 < z_1 < \infty\ ;\ 0 < z_2 < \infty.$$

$$= 0,\qquad \text{மற்றபடி}$$

இப்போது z_1-ன் சார்பு

$$g_1(z_1) = 12\,e^{-3z_1}(1-e^{-z_1})\ ;$$

z_2-ன் சார்பு

$$g_2(z_1) = 2\,e^{-z_2}\,(1-e^{-z_2})$$

எனக் கொள்ளும்போது இவ்விரு சார்புகளின் பெருக்குத்தொகை $h(z_1, z_2)$-க்குச் சமமாக அமைகிறது.

எனவே Z_1, Z_2 மாறிகள் சார்பற்றனவாக அமைகின்றன என்கிறோம்.

தேற்றம் 2

தொடர்ச்சியான மாறி X-ன் நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்

$$f(x) > 0 \quad ; \quad a < x < b$$
$$f(x) = 0 \quad ; \quad \text{மற்றபடி}$$

எனவும், U, V ஆகிய மாறிகள் முறையே X-பரவலிலிருந்து பெற்ற சமவாய்ப்புக் கூறு மாறிகளின் மீச்சிறுமம், மீப்பெருமம் எனவும் கொள்வோம். அப்போது $Y = V - U$ மாறியைக் கூறின் வீச்சு (Sample range) என வரையறுக்கிறோம்.

Y-மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்,

$$g_Y(y) = n(n-1) \int_y^b f(t) f(t-y) [F(t) - F(t-y)]^{n-2} \, dt, \quad a < y < b$$

$$= 0, \quad \text{மற்றபடி}$$

ஆகும்.

தெரிப்பு

X-பரவலிலிருந்து பெற்ற சமவாய்ப்புக் கூறு மாறிகளின் மீச்சிறுமம் U, மீப்பெருமம் V ஆகிய மாறிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவுப் பரவல் தேற்றம் 1-ன் வாயிலாக

$$\phi(u, v) = n(n-1) [F(v) - F(u)]^{n-2} f(u) f(v), \quad a < u < v < b$$

எனப் பெறுகிறோம்.

இப்போது,

$$Y = V - U \quad ; \quad T = V$$

எனக் கொள்வோம்.

$y = v - u \;\; ; \;\; t = v$ ஆகிய சார்புகள் A, B

$$A = [(u, v) \;:\; a < u < v < b]$$
$$B = [(y, t) \;:\; a < y < t < b]$$

ஆகிய இரு கணப்பகுதிகளின் ஒன்றுக்கொன்றான உருமாற்ற மாகும். இந்த உருமாற்றத்தின் எதிர்மாறான சார்புகள் $u = t - y$, $v = t$, ஜாக்கோபியன் -1 ஆகின்றன.

எனவே Y, T ஆகிய மாறிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்,

$$h(y, t) = n(n-1)\,[F(t)-F(t-y)]^{n-2} f(t-y)f(t), \qquad a < y < t < b$$

$$= 0, \qquad \text{மற்றபடி}$$

ஆகும்.

Y-மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்,

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} h(y, t)\, dt$$

$$= n(n-1) \int_{y}^{b} [F(t)-F(t-y)]^{n-2} f(t-y)\, f(t)\, dt, \qquad a < y < b$$

$$= 0, \qquad \text{மற்றபடி}$$

ஆகும்.

கணக்கு

இடைவெளி (0, 1)-யில் அமையும் சீரான பரவலிலிருந்து n உறுப்புகள் கொண்ட சமவாய்ப்புக் கூறின் வீச்சு Y எனில், அதன் நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவலைப் பெறுக.

முறை

தேற்றம் 2-ன் வாயிலாகக் கூறு வீச்சு Y-ன் நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்,

$$g_Y(y) = n(n-1) \int_{y}^{1} f(t-y)f(t)\, [F(t)-F(t-y)]^{n-2} dt, \qquad 0 < y < 1$$

$$= 0, \qquad \text{மற்றபடி}$$

ஆகும்.

(0, 1) இடைவெளியில் அமையும் சீரான பரவலின் பரவல் சார்பு,

$$F(t) = \int_0^t f(x)\,dx = t$$

ஆக அமைவதால்

$$F(t) - F(t-y) = t - (t-y) = y \quad \text{ஆகும்.}$$

மேலும்

$$f(t-y)\,f(t) = 1, \quad 0 < y < t < 1 \quad \text{ஆகும்.}$$

எனவே,

$$g_y(y) = n(n-1)\int_y^1 y^{n-2}\,dt$$

$$= n(n-1)\,y^{n-2}(1-y), \quad 0 < y < 1$$

$$= 0, \qquad \text{மற்றபடி}$$

ஆகும்.

5. புள்ளியியல் உய்த்துணர்வு

(Statistical Inference)

ஒரு ராண்டம் மாறியின் நிகழ்தகவுப் பரவலைப் பற்றிய விவரங்களை அப்பரவலிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்படும் கூறு வாயிலாகப் பெற கையாளும் வழிமுறைகளைப் புள்ளியியல் உய்த்துணர்வு முறைகள் என வழங்குகிறோம்.

ஒரு ராண்டம் மாறியின் நிகழ்தகவுச் சார்பு கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது எனக் கொள்வோம். இப்போது, அதன் சுட்டுறுப்புக்களின் மதிப்புகள் தெரியாதவிடத்து, அவைகளைக் கூறுமாறிகளின் கண்டறிந்த மதிப்புகள் வாயிலாக மதிப்பிடுவதைப் புள்ளியியல் மதிப்பிடுதல் (Statistical Estimation) எனவும், சுட்டுறுப்புக்களின் மதிப்புகளை ஊகமாக எடுத்துக்கொண்டு கூறுமாறிகளின் கண்டறிந்த மதிப்புகள் வாயிலாக அவ்வூகம் உண்மையென ஏற்றுக் கொள்ளத்தக்கதா அல்லது தவறென மறுக்கத்தக்கதா எனச் சோதிப்பதைப் புள்ளியியல் எடுகோள் சோதனைகள் (Tests of statistical hypothesis) எனவும் அழைக்கிறோம். சுட்டுறுப்புகளை மையமாகக் கொண்டு அமைந்துள்ள புள்ளியியல் மதிப்பிடுதல், புள்ளியியல் எடுகோள் சோதனை ஆகியவைகளைச் சுட்டுறுப்பைச் சார்ந்த முறைகள் (Parametric Methods) என வழங்குகிறோம். ராண்டம் மாறியின் நிகழ்தகவுச் சார்பு தெரியாதபோது கூறுமாறிகளின் கண்டறிந்த மதிப்புகள் வாயிலாக மாறியின் பரவலைப்பற்றிய விவரங்களைப் பெற மேற்கொள்ளும் உய்த்துணர்வு முறைகளைப் பரவல் விடுபட்ட முறைகள் (Distribution-Free Methods) அல்லது சுட்டுறுப்பைச் சாராத முறைகள் (Non-parametric Methods) என அழைக்கிறோம்.

புள்ளியியல் மதிப்பிடுதல்

ஒரு ராண்டம் மாறி X-ன் சுட்டுறுப்பு θ எனக்கொள்வோம். θ-ன் மதிப்பு தெரியாதபோது X மாறியின் பரவலிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்படும் சமவாய்ப்புக் கூறு மாறிகளைப் பயன்படுத்தி அதை மதிப்பிட விழைகிறோம்.

$X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ ஆகியவைகள் X மாறியின் பரவலிலிருந்து பெற்ற சமவாய்ப்புக்கூறு எனில், இவைகளின் சார்பு $\phi(X_1 X_2 \ldots X_n)$ ஒன்றைச் சுட்டுறுப்பு θ-வை மதிப்பிட ஏற்றவாறு எடுத்துக்கொள் கிறோம். $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ஆகியவைகளின் கண்டறிந்த மதிப்புக்கள் முறையே $x_1, x_2, \ldots, x_n$ எனில், $\phi(x_1 x_2 \ldots x_n)$-ஐச் சுட்டுறுப்பு θ-ன் மதிப்பு எனக் கொள்கிறோம். இதைச் சுட்டுறுப்பு θ-க்கான **புள்ளி மதிப்பு** (Point Estimate) என வழங்குகிறோம். கூறு அளவை $\phi(x_1 x_2 \ldots x_n)$-ஐப் **புள்ளி மதிப்பளவை** (Point Estimator) என அழைக்கிறோம்.

இப்போது கூறுமாறிகள் $X_1 X_2 \ldots X_n$ ஆகியவைகளின் சார்புகள் $\psi_1 = \psi_1(x_1 x_2 \ldots x_n)$, $\psi_2 = \psi_2(x_1 x_2 \ldots x_n)$ ஆகியவை களை, $\psi_1 < \psi_2$ எனும் நிபந்தனைக்குட்படும்படி எடுத்துக்கொண்டு, சுட்டுறுப்பு θ, இடைவெளி (ψ_1, ψ_2) யில் அடங்கியிருப்பதற்கான

$$P_r(\psi_1 < \theta < \psi_2) = 1-\alpha, \quad 0 < \alpha < 1$$

நிகழ்தகவு $(1-\alpha)$ என அமைக்க இயலுமெனில், இடைவெளி (ψ_1, ψ_2)-ஐச் சுட்டுறுப்பு θ-க்கு அமைக்கும் $(1-\alpha)$ சதவீத **ராண்டம் இடைவெளி** என அழைக்கிறோம். $X_1 X_2 \ldots X_n$ ஆகிய மாறிகளின் கண்டறிந்த மதிப்புக்கள் முறையே $x_1 x_2 \ldots x_n$ எனில், $\psi_1 \psi_2$ ஆகிய சார்புகளின் மதிப்புகளை $a_1 = \psi_1(x_1 x_2 \ldots x_n)$, $a_2 = \psi_2(x_1 x_2 \ldots x_n)$ எனக் குறிப்பிட்டுச் சுட்டுறுப்பு θ-வின் மதிப்பு (a_1, a_2) இடைவெளியில் அடங்கியிருக்கிறது என உய்த்துணர் கிறோம். இடைவெளி (a_1, a_2)-ஐச் சுட்டுறுப்பு θ-க்கு அமைக்கும் **நம்பிக்கை இடைவெளி** (Confidence Interval) எனவும், a_1, a_2 ஆகியவைகளை முறையே நம்பிக்கை இடைவெளியின் மேல் எல்லை, கீழ் எல்லை எனவும் வழங்குகிறோம். மெய்யெண் $(1-\alpha)$-ஐ **நம்பிக் கைக் கெழு** (Confidence Coefficient) என வழங்குகிறோம்.

இப்போது, சுட்டுறுப்பு θ-ஐ மதிப்பிட ஏற்றதொரு கூறு அளவை $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1 X_2 \ldots X_n)$ எனவும், இதன் கூறு பரவல் $g(\hat{\theta}; \theta)$ எனவும் கொள்வோம். $C_1 < C_2$ என அமையும், C_1, C_2 ஆகிய இரு மெய்யெண்களைக் கீழ்க்கண்ட நிபந்தனைக்குட் படும்படியாக,

$$P_r\left(C_1 < \hat{\theta} < C_2\right) = \int_{C_1}^{C_2} g\left(\hat{\theta}, \theta\right) d\,\hat{\theta} = 1-\alpha$$

எடுத்துக் கொள்வோம். இங்கு C_1, C_2 ஆகியவைகள் θ, α ஆகிய வைகளைச் சார்ந்துள்ளனவாகும். இப்போது, $\psi_1 = \psi_1\left(\hat{\theta}\right)$, $\psi_2 = \psi_2\left(\hat{\theta}\right)$ ஆகிய இரு சார்புகள் $\hat{\theta}$-ஐ மட்டுமே சார்ந்துள்ளன வாகவும், சுட்டுறுப்பு θ-ஐச் சாராததாகவும், கீழ்க்கண்ட சமன் பாட்டிற்கு,

$$\text{நிகழ்ச்சி}\,(\psi_1 < \theta < \psi_2) = \text{நிகழ்ச்சி}\,(C_1 < \hat{\theta} < C_2)$$

பொருந்துவனவாகவும் அமைகின்றன எனக் கொள்வோமெனில், ψ_1, ψ_2 ஆகியவைகளைக் கொண்டமைக்கும் இடைவெளி (ψ_1, ψ_2) சுட்டுறுப்பு θ-க்கான $(1-\alpha)$ சதவீத ராண்டம் இடைவெளி என் கிறோம். இங்ஙனம் சுட்டுறுப்பு θ-ன் மதிப்பு அடங்கியிருக்கும் ராண்டம் இடைவெளியைப் பெறும் முறையை இடைவெளி மதிப்பீடு முறை (Method of Interval estimation) என அழைக் கிறோம்.

எடுகோள் சோதனை (Test of Hypothesis)

ஒரு ராண்டம் மாறியைப்பற்றி அமைக்கும் ஊகத்தைப் **புள்ளி யியல் எடுகோள்** என அழைக்கிறோம்.

ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டியெறியும்போது 'தலை' மேற்புறமாக ஏற்படும் நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு 0·5, பாய்சான் மாறி Y-ன் சராசரி 2, Z மாறி இயல்நிலைப் பரவலைப் பெற்றுள்ளது, V மாறி யின் மதிப்பு 50-க்குக் கூடுதலாக ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவு 0·8 ஆகியவைகள் புள்ளியியல் எடுகோள்களுக்கு எடுத்துக்காட்டுக்களா கின்றன.

ஒரு ராண்டம் மாறி X-ன் சுட்டுறுப்பு θ-ன் மதிப்பு தெரியாத போது, அது நிலையெண் θ_0 ஆகும் என ஊகமாகக் கொள்வோம். ராண்டம் மாறியின் பரவலிலிருந்து ஒரு சமவாய்ப்புக் கூறு தேர்ந் தெடுத்து அதன் வாயிலாகச் சுட்டுறுப்பு $\theta = \theta_0$ எனும் ஊகம் உண்மையென ஏற்றுக்கொள்ளத்தக்கதா அல்லது தவறென மறுக்கத்தக்கதா எனச் சோதனை செய்ய விழைகிறோம்.

ராண்டம் மாறி X-ன் சுட்டுறுப்பு $\theta = \theta_0$ எனும் எடுகோளை அடிப்படையாகக் கொண்டு சோதனையை மேற்கொள்ள விழைவ தால் இந்த எடுகோளைச் **சூன்ய எடுகோள்** (Null-Hypothesis) என அழைக்கிறோம். சூன்ய எடுகோளுக்கு மாறாக அமைக்கும் எடு

கோளை **மாற்று எடுகோள்** (Alternate Hypothesis) எனக் குறிப்பிடு கிறோம்.

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ ஆகியன X பரவலிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப் படும் சமவாய்ப்புக் கூறு எனக் கொள்வோம். அப்போது, கூறு மாறிகள் உருவாக்கும் வெளியானது, n-பரிமாண மெய்யெண்களின் வெளி

$$S = \{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) : -\infty < x_1 < \infty, -\infty < x_2 < \infty, \ldots; -\infty < x_n < \infty \}$$

ஆகும்.

கூறு வெளியின் ஓர் உட்கணம் A-ஐ எடுத்துக்கொள்வோம். ராண்டம் கூறுமாறி வெக்டர் $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$-ன் கண்டறிந்த மதிப்பு வெக்டர் $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ எனக்கொள்வோம். இப்போது, $t \in A$ எனில், சூனிய எடுகோளை மறுக்கத்தக்க தெனவும் அவ்வாறில்லையெனில் சூனிய எடுகோள் மறுக்கத்தகாத தெனவும் உய்த்துணர்வதை **எடுகோள் சோதனை** என அழைக் கிறோம். உட்கணம் A-ஐச் சோதனையின் **தீர்வுகட்டமான வெளி** (Critical Region) என வழங்குகிறோம்.

எடுகோள் சோதனையில் இருவகையான பிழைகள் நேர வாய்ப்புள்ளது. சூனிய எடுகோள் உண்மையாயிருக்கும்போது, அதனை மறுக்கத்தக்கதென உய்த்துணருவது தவறாகும்: இதை **முதல் வகைப் பிழை** (Type I error) எனக் குறிப்பிடுகிறோம். சூனிய எடுகோள் உண்மையாயிராதபோது அது மறுக்கத்தகாததென உய்த்துணருவதை **இரண்டாம் வகைப் பிழை** (Type II error) எனக் குறிப்பிடுகிறோம். முதல் வகைப் பிழை ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவு மதிப்பை α எனக் குறிப்பிடும்போது

$$\alpha = P_r [x_1 x_2 \ldots x_n) \in A / \theta = \theta_0]$$

ஆகும். இதைச் **சோதனையின் மிகைத்தன்மை மட்டம்** (Level of Significance of the test) அல்லது **தீர்வுகட்டமான வெளியின் அளவு** (Size of the critical region) என வழங்குகிறோம்.

இரண்டாவது வகைப் பிழை ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவு மதிப்பை $(1-\beta)$ எனக் குறிப்பிடும்போது

$$1 - \beta = P_r [(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S - A / \theta \neq \theta_0]$$

ஆகும். இப்போது β-ஐ

$$\beta = P_r [(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A / \theta \neq \theta_0]$$

சோதனையின் ஆக்கத்திறன் (Power of the test) என வழங்கு கிறோம்.

சூனிய எடுகோள், மாற்று எடுகோள் ஆகியவைகளை அமைப்பது, சோதனையின் மிகைத்தன்மை மட்டம், சோதனையின் ஆக்கத்திறன் ஆகியவைகளுக்கு ஏற்றவாறு தீர்வு கட்டமான வெளியைப் பெறுவது ஆகியன புள்ளியியல் உய்த்துணர்வு முறைகளின் முக்கிய கட்டங்களாகும்.

இப்போது எடுகோள் சோதனையை மேற்கொள்ள ஏதுவான தீர்வுகட்டமான வெளியை கூறுமாறிகளின் n-பரிமாண வெளியின் உட்கணமாக எடுத்துக்கொள்வதாகக் குறிப்பிட்டோம். நடைமுறையில் n-பரிமாண வெளியின் உட்கணத்திற்கு இணையான ஒருபரிமாண வெளியின் உட்கணத்தைத் தீர்வுகட்டமான வெளியாக அமைத்துக்கொள்ள விழைகிறோம். இதற்குக் கூறு பரவல்கள் பெரிதும் பயன்படுகின்றன.

ராண்டம் மாறியின் பரவலின் நிகழ்தகவுச் சார்பு தெரியாத விடத்து அதன் சுட்டுறுப்புகளைப்பற்றி குறிப்பிட்டுக் கூறுவதற்கு இல்லையெனினும், அதன் இடைநிலை, சதமானம், வீச்சு போன்ற பண்புகளைப்பற்றி உய்த்துணர மேற்கொள்ளும் சுட்டுறுப்பு சாராத முறைகளிலும் கூறுபரவல்கள் பெருமளவிற்குப் பயன்படுகின்றன.

6. சில திருத்தமான கூறு பரவல்களும் பயன் முறைகளும்

(Some Exact Sampling Distributions and applications)

கைவர்க்கப் பரவல்

(Chi Square Distribution)

தேற்றம் 1

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ ஆகியன n சார்பற்ற, முழுதொத்த திட்ட இயல்நிலை $N(0, 1)$ மாறிகளெனில் இவைகளின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் Z-மாறியின்

$$Z = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2$$

நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்

$$f_z(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n}{2}-1}, \quad 0 < x < \infty$$

$$= 0, \qquad \text{மற்றபடி}$$

ஆகும்.

தெரிப்பு

ராண்டம் மாறி X ஆனது திட்ட இயல்நிலை $N(0, 1)$ மாறி எனில், இதன் வர்க்கம் மாறி $y = x^2$-ன் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு

$$M_y(t) = E(e^{ty})$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$
$$= (1-2t)^{-\frac{1}{2}}, \quad t < \tfrac{1}{2}$$

ஆகும்.

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ ஆகிய சார்பற்ற, முழுதொத்த திட்ட இயல் நிலை $N(0, 1)$ மாறிகளின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் Z-மாறியின்

$$Z = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2$$

விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பு

$$M_z(t) = E(e^{tz})$$
$$= E\left[e^{t(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)}\right]$$
$$= E\left[e^{tx_1^2} e^{tx_2^2} \ldots e^{tx_n^2}\right]$$
$$= E(e^{tx_1^2}) \, E(e^{tx_2^2}) \ldots E(e^{tx_n^2})$$

∵ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ஆகியவைகள் சார்பற்ற மாறிகள்

$$= \left[E(e^{tx_1^2})\right]^n$$

∵ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ஆகியவைகள் முழுதொத்த மாறிகள்

$$= (1-2t)^{-\frac{n}{2}}$$

∵ x_1 ஆனது திட்ட இயல் நிலை $N(0, 1)$ மாறி

ஆகும்.

இக்கோவையானது $\alpha = \frac{1}{2}$, $p = \frac{n}{2}$ ஆகியவைகளைச் சுட்டுறுப்புகளாகக் கொண்ட 'காமா' ராண்டம் மாறியின் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பாக அமைகிறது. விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பானது ராண்டம் மாறியின் பரவலைத் தனியொன்றாக வரையறை செய்யும் பண்பின் வாயிலாக, Z மாறியின் பரவலானது $\alpha = \frac{1}{2}$, $p = \frac{n}{2}$ ஆகியவைகளைச் சுட்டுறுப்புகளாகக் கொண்ட காமா பரவல் எனப் பெறுகிறோம்.

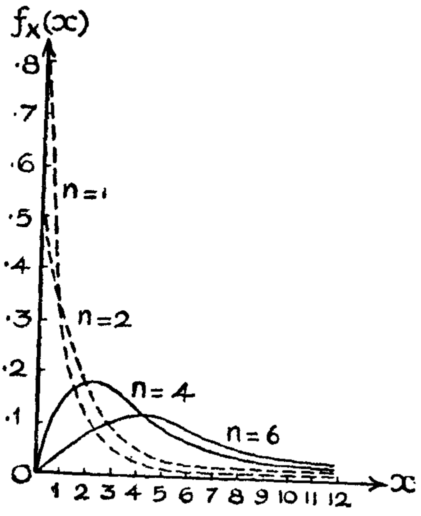
Z-மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்

$$f_z(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n}{2}-1}, \quad 0 < x < \infty$$

$$= 0, \qquad \text{மற்றபடி}$$

ஆகும்.

இந்நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவலை 'n' கட்டின்மை கொண்ட கைவர்க்கப் பரவல் என அழைக்கிறோம். Z மாறியானது n சாரா பற்ற, முழுதொத்த திட்ட இயல்நிலை $N(0, 1)$ மாறிகளின் வர்க்கங்களின் கூடுதலாக அமைவதால் அதை 'n' கட்டின்மை கொண்ட கைவர்க்க ராண்டம் மாறி என அழைக்கிறோம். கைவர்க்க ராண்டம் மாறியைக் குறியீட்டால் X^2 எனக் குறிப்பிடுகிறோம்.



படம் 6.1
கைவர்க்க அடர்த்திப் பரவல்கள்

படம் 6.1-ல், கட்டின்மை $n = 1, 2, 4, 6$ மதிப்புகளைக் கொண்ட கைவர்க்க மாறியின் அடர்த்திப் பரவல்கள் காட்டப்பட்டுள்ளன.

n கட்டின்மை கொண்ட கைவர்க்க மாறி Z-ன் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பு

$$M_z(t) = (1-2t)^{-\frac{n}{2}}, \qquad t < \tfrac{1}{2}$$

ஆகும். இச்சார்பை t-ன் படித்தொடராக விரித்து, $\frac{t^r}{r}$-ன் கெழுவைப் பெற்று Z மாறியின் r ஆவது விலக்கப் பெருக்கத் தொகையை

$$\mu_r' = n(n+2)\ldots(n+2r-2)$$

அடைகிறோம்.

இப்போது, Z மாறியின் சராசரி

$$E(z) = \mu_1' = n$$

ஆகும்.

Z மாறியின் மாறுபாடு,

$$\begin{aligned} D^2(z) &= \mu_2' - (\mu_1')^2 \\ &= n(n+2) - n^2 \\ &= 2n \end{aligned}$$

ஆகும்.

எனவே, n கட்டின்மை கொண்ட கைவர்க்க மாறியின் சராசரி n, மாறுபாடு $2n$ ஆகின்றன.

இப்போது, n கட்டின்மை கொண்ட கைவர்க்க மாறி Z ஆனது நிலையெண் K_a-க்குக் கூடுதலான மதிப்பை ஏற்றுக் கொள்வதற்கான நிகழ்தகவு,

$$P_r(Z > K_a) = \int_{K_a}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n}{2}} dx$$

$$= a, \qquad 0 < a < 1$$

என்போம். நிலையெண் K_a-ஐ n கட்டின்மை கொண்ட கைவர்க்க மாறியின் $100a$ சதவீதப் புள்ளி என அழைக்கிறோம். $n = 1, 2, \ldots$, $a = \cdot 01, \cdot 02, \ldots$ ஆகிய மதிப்புகளுக்கு இணையான K_a-ன் மதிப்புகள் பிஷர்யேட்ஸ், பையோமெட்ரிகா முதலிய புள்ளியியல் அட்டவணைப் புத்தகங்களில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

தேற்றம் 2

m, n ஆகியவைகளைக் கட்டின்மைகளாகக் கொண்ட இரு சார்பற்ற கைவர்க்க ராண்டம் மாறிகளின் கூடுதலானது, $(m+n)$ கட்டின்மை கொண்ட கைவர்க்க ராண்டமாறி ஆகும்.

தெரிப்பு

m கட்டின்மை கொண்ட கைவர்க்க ராண்டமாறி X எனவும், n கட்டின்மை கொண்ட கைவர்க்க ராண்டமாறி Y எனவும் இவைகள் சார்பற்றன எனவும் கொள்வோம்.

X மாறியின் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பு,

$$M_x(t) = (1-2t)^{\frac{m}{2}}$$

Y மாறியின் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பு

$$M_y(t) = (1-2t)^{\frac{n}{2}}$$

ஆகின்றன.

இப்போது $Z = x+y$ மாறியின் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பைப் பெறுவோம்.

$$\begin{aligned} M_z(t) &= E\left(e^{tz}\right) \\ &= E\left(e^{t(x+y)}\right) \\ &= E\left(e^{tx}\right) E\left(e^{ty}\right) \qquad \because \ x, y \text{ மாறிகள் சார்பற்றன.} \\ &= M_x(t)\ M_y(t) \\ &= (1-2t)^{\frac{m+n}{2}} \end{aligned}$$

ஆகும்.

இக்கோவையானது, $(m+n)$ கட்டின்மை கொண்ட கைவர்க்க மாறியின் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பாக அமைகிறது. விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பானது ராண்டம் மாறியின் பரவலைத் தனியொன்றாக வரையறை செய்யும் பண்பின் வாயிலாக, Z மாறியானது $(m+n)$ கட்டின்மை கொண்ட கைவர்க்க மாறியாகும் என்கிறோம்.

தேற்றம் 3

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ ஆகியன சார்பற்ற, முழுதொத்த இயல்நிலை $N(0, \sigma^2)$ மாறிகளெனில்,

(i) $Z = \frac{1}{n}(X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2)$

Z மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்

$$f_z(x) = \frac{n^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \sigma^n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{nx}{2\sigma^2}} x^{\frac{n}{2}-1}, \quad 0 < x < \infty$$

$$= 0, \quad \text{மற்றபடி}$$

ஆகவும்

(ii) $U = \sqrt{\frac{1}{n}(X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2)}$ ஆனது மிகை வர்க்கமூலமெனில் U-மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்

$$f_u(x) = \frac{n^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n-2}{2}} \sigma \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{nx^2}{2\sigma^2}} x^{n-1}, \quad 0 < x < \infty$$

$$= 0, \quad \text{மற்றபடி}$$

ஆகவும் அமைகின்றன.

தெரிப்பு

(i) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ஆகியன ஒவ்வொன்றும் இயல்நிலை $N(0, \sigma^2)$ மாறியெனில், $\frac{X_1}{\sigma}, \frac{X_2}{\sigma}, \ldots, \frac{X_n}{\sigma}$ ஆகியன ஒவ்வொன்றும் $N(0, 1)$ மாறியாகும். எனவே, தேற்றம் 1-ன்படி, $W = \frac{X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2}{\sigma^2}$ மாறியானது, n கட்டின்மை கொண்ட கைவர்க்க ராண்டம் மாறியாகும்.

மாறி W-ன் பரவல்

$$f_W(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \left| \left(\frac{n}{2}\right) \right.} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n}{2}-1}, \quad 0 < x < \infty$$

$$= 0, \qquad \text{மற்றபடி}$$

ஆகும்.

இப்போது; $Z = \frac{1}{n} (X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2)$

$$= \frac{\sigma^2}{n} \left(\frac{X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2}{\sigma^2} \right)$$

$$= \frac{\sigma^2}{n} W$$

ஆகும்.

Z-மாறியின் பரவல் சார்பு

$$F_Z(x) = P_r (Z \leq x)$$

$$= P_r \left(\frac{\sigma^2 W}{n} \leq x \right)$$

$$= P_r \left(W \leq \frac{n x}{\sigma^2} \right)$$

$$= \int_o^{\frac{nx}{\sigma^2}} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \left| \left(\frac{n}{2}\right) \right.} e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{n}{2}-1} dy$$

ஆகும்.

எனவே, Z-மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$$f_Z(x) = \frac{d}{dx} [F_Z(x)] .$$

$$= \frac{n^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \sigma_n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{n x}{2\sigma^2}} x^{\frac{n}{2}-1}, \quad 0 < x < \infty$$

$= 0,$ மற்றபடி

ஆகும்.

(ii) இப்போது,

$$U = \sqrt{\frac{1}{n}(X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2)}$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{(X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2)}{\sigma^2}}$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{W}$$

ஆகும்.

U மாறியின் பரவல் சார்பு

$$F_u(x) = P_r(U \leq x)$$

$$= P_r\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{W} \leq x\right)$$

$$= P_r\left(W \leq \frac{nx^2}{\sigma^2}\right)$$

$$= \int_0^{\frac{nx^2}{\sigma^2}} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{n}{2}-1} dy$$

ஆகும்.

எனவே, U மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$$f_u(x) = \frac{n^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n-2}{2}} \sigma^n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{nx^2}{2\sigma^2}} x^{n-1}, \quad 0<x<\infty$$

$= 0,$ மற்றபடி

ஆகும்.

தேற்றம் 4

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ ஆகியன இயல்நிலை $N(\mu, \sigma^2)$ பரவலிலிருந்து தேர்ந்தெடுத்த சமவாய்ப்புக் கூறு எனில்,

(i) கூறு மாறுபாடு S^2-ன்

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

கூறுபரவல்

$$f_{S^2}(x) = \frac{n^{\frac{n-1}{2}}}{2^{\frac{n-1}{2}} \sigma^{n-1} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} e^{-\frac{nx}{2\sigma^2}} x^{\frac{n-3}{2}}, \quad 0<x<\infty$$

$$= 0, \qquad \text{மற்றபடி}$$

ஆகவும்

(ii) கூறு திட்ட விலக்கம் S-ன்

$$S = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}$$

கூறுபரவல்

$$f_S(x) = \frac{n^{\frac{n-1}{2}}}{2^{\frac{n-3}{2}} \sigma^{n-1} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} e^{-\frac{nx^2}{2\sigma^2}} x^{n-2}, \quad 0<x<\infty$$

$$= 0, \qquad \text{மற்றபடி}$$

ஆகவும் அமைகின்றன.

தெரிப்பு

(i) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ஆகிய கூறுமாறிகள் சார்பற்ற, முழு தொத்த இயல்நிலை $N(\mu, \sigma^2)$ மாறிகளாவதால், $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ ஆகிய புதிய மாறிகளை

$$Y_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

எடுத்துக்கொள்வோமெனில், இப் புதிய மாறிகள் சார்பற்ற, முழுதொத்த திட்ட இயல்நிலை N (0, 1) மாறிகளாகின்றன.

இப்போது, $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ மாறிகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு வரையறுப்போமெனில்,

$$Z_1 = \frac{1}{\sqrt{n}} (Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n)$$

$$Z_r = \frac{1}{\sqrt{r(r-1)}} \left[Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{r-1} - (r-1) Y_r \right], \quad r = 2, 3, \ldots, n$$

இவைகளும் சார்பற்ற, முழுதொத்த திட்ட இயல்நிலை N (0, 1) மாறிகளாகின்றன. மேலும்,

$$\sum_{i=2}^{n} Z_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \quad \text{ஆகும்.}$$

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ ஆகிய கூறு மாறிகளின் கூறு மாறுபாடு

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

எனில்,

$$\frac{n s^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} = Z_2^2 + Z_3^2 + \ldots Z_n^2 \quad \text{ஆகும்.}$$

$Z_2, Z_3, \ldots, Z_n$ ஆகியன $(n - 1)$ சார்பற்ற, முழுதொத்த திட்ட இயல்நிலை மாறிகளாதலால் அவைகளின் வர்க்கங்களின் கூடுதலானது $(n - 1)$ கட்டின்மை கொண்ட கைவர்க்கப் பரவலாகும். எனவே,

$$\frac{n s^2}{\sigma^2} = U$$

எனக் குறிப்பிடும்போது, U மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்

$$f_u(x) = \frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{\left(\frac{n-1}{2}\right)}} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n-3}{2}}, \quad 0 < x < \infty$$

$$= 0, \quad \text{மற்றபடி}$$

ஆகும்.

இப்போது, S^2 - மாறியின் பரவல் சார்பு

$$F_{S^2}(x) = P_r(S^2 \leq x)$$
$$= P_r\left(\frac{nS^2}{\sigma^2} \leq \frac{n\,x}{\sigma^2}\right)$$
$$= P_r\left(U \leq \frac{n\,x}{\sigma^2}\right)$$
$$= \int_0^{\frac{n\,x}{\sigma^2}} \frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\, e^{-\frac{y}{2}}\, y^{\frac{n-3}{2}}\, dy$$

ஆகும்.

எனவே, S^2 - மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்

$$f_{s^2}(x) = \frac{d}{dx}\left[F_{S^2}(x)\right]$$
$$= \frac{n^{\frac{n-1}{2}}}{2^{\frac{n-1}{2}}\,\sigma^{n-1}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\, e^{-\frac{n\,x}{2\sigma^2}}\, x^{\frac{n-3}{2}}, \quad 0 < x < \infty$$
$$= 0, \text{ மற்றபடி}$$

ஆகும்.

(ii) கூறு திட்ட விலக்கம் S-ன் பரவல் சார்பு

$$F_s(x) = P_r(S \leq x)$$
$$= P_r(S^2 \leq x^2)$$
$$= \int_0^{x^2} \frac{n^{\frac{n-1}{2}}}{2^{\frac{n-1}{2}}\,\sigma^{n-1}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\, e^{-\frac{n\,y}{2\sigma^2}}\, y^{\frac{n-3}{2}}\, dy$$

ஆகும்.

எனவே, S மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$$f_s(x) = \frac{d}{dx}\left[F_s(x)\right]$$

$$= \frac{n^{\frac{n-1}{2}}}{2^{\frac{n-3}{2}}\sigma^{n-1}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} e^{-\frac{n x^2}{2\sigma^2}} x^{n-2}, 0 < x < \infty$$

$= 0$, மற்றபடி

ஆகும்.

தேற்றம் 5

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ ஆகிய n சார்பற்ற, முழுதொத்த திட்ட இயல்நிலை $N(0, 1)$ ராண்டம் மாறிகள்

$$l_1 X_1 + l_2 X_2 + \ldots + l_n X_n = 0$$

எனும் நிபந்தனைக்குட்பட்டிருப்பின் அவைகளின் வர்க்கங்களின் கூடுதலான Z மாறியானது

$$Z = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2$$

$(n-1)$ கட்டின்மை கொண்ட கைவர்க்க மாறியாகும். $l_1, l_2, \ldots, l_n$ ஆகியன நிலை யெண்களாகின்றன.

தெரிப்பு

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ ஆகியன n சார்பற்ற, முழுதொத்த திட்ட இயல்நிலை மாறிகளெனில், அவைகளின் இணைந்த நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_i^2}, \quad -\infty < x_i < \infty$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

ஆகும்.

இப்போது, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ ஆகிய மாறிகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு வரையறுப்போம்.

$$Y_1 = \frac{l_1}{l} X_1 + \frac{l_2}{l} X_2 + \ldots + \frac{l_n}{l} X_n, \quad l^2 = l_1^2 + l_2^2 + \ldots + l_n^2$$

$$Y_i = w_{i1} X_1 + w_{i2} X_2 + \ldots + w_{in} X_n, \quad i = 2, 3, \ldots, n$$

இங்கு $w_{i1}, w_{i2}, \ldots, w_{in}$, $i=2, 3, \ldots, n$ ஆகிய $n(n-1)$ நிலையெண்களைக் கீழ்க்கண்ட அணி H ஆனது,

$$H = \begin{vmatrix} \frac{l_1}{l} & \frac{l_2}{l} & \cdots & \frac{l_n}{l} \\ w_{21} & w_{22} & \cdots & w_{2n} \\ \vdots & & & \\ w_{n1} & w_{n2} & \cdots & w_{nn} \end{vmatrix}$$

ஒரு செங்குத்தணி (orthogonal matrix) ஆகும்படி எடுத்துக் கொள்ளுகிறோம்.

$$y_1 = \frac{l_1}{l} x_1 + \frac{l_2}{l} x_2 + \ldots + \frac{l_n}{l} x_n$$

$$y_i = w_{i1} x_1 + w_{i2} x_2 + \ldots + w_{in} x_n, \; i = 2, 3, \ldots, n$$

ஆகிய சார்புகள் $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ஆகிய மாறிகளின் வெளியான

$$A = \{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) : -\infty < x_i < \infty, \;\; i = 1, 2, \ldots, n \}$$

A கணம், $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ ஆகிய மாறிகளின் வெளியான

$$B = \{ (y_1, y_2, \ldots, y_n) : -\infty < y_i < \infty, \;\; i = 1, 2, \ldots, n \}$$

B கணம் ஆகிய இருகணங்களின் செங்குத்தான உருமாற்றமாகும். உருமாற்றத்தை செங்குத்தானதாக எடுத்துக் கொள்வதால், உருமாற்றத்தின் ஜாக்கோபியன்,

$$J = | H | = \pm 1$$

ஆகவும்,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

ஆகவும் அமைகின்றன.

எனவே, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ ஆகிய n மாறிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்

$$g(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \, e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} y_i^2},$$

$$-\infty < y_i < \infty, \;\; i=1, 2, \ldots, n$$

ஆகும்.

இந்த இணைந்த நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்

$$g(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} y_i^2}, \quad -\infty < y_i < \infty$$

ஆக அமைவதால், $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ ஆகிய n மாறிகளானவை சார்பற்ற, முழுதொத்த திட்ட இயல்நிலை மாறிகளாகின்றன எனப் பெறுகிறோம்.

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ ஆகிய மாறிகள்

$$l_1 X_1 + l_2 X_2 + \ldots + l_n X_n = 0$$

எனும் நிபந்தனைக் குட்பட்டிருப்பின், Y_1 மாறியானது

$$y_1 = \frac{l_1}{l} X_1 + \frac{l_2}{l} X_2 + \ldots + \frac{l_n}{l} X_n$$

பூச்சிய மதிப்பைப் பெறுகிறது. எனவே,

$$l_1 X_1 + l_2 X_2 + \ldots + l_n X_n = 0$$

எனும் நிபந்தனைக்குட்பட்டிருக்கும் $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ஆகிய மாறிகளின் வர்க்கங்களின் கூடுதலை, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ ஆகிய வர்க்கங்களின் கூடுதலாகக் குறிக்கும்போது,

$$\begin{aligned} Z &= X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2, \quad l_1 x_1 + l_2 x_2 + \ldots + l_n x_n = 0 \\ &= Y_1^2 + Y_2^2 + \ldots + Y_n^2, \quad Y_1 = 0 \\ &= Y_2^2 + Y_3^2 + \ldots + Y_n^2 \end{aligned}$$

ஆகும்.

$Y_2, Y_3, \ldots, Y_n$ ஆகியன $(n-1)$ சார்பற்ற, முழுதொத்த திட்ட இயல்நிலை $N(0, 1)$ மாறிகளாவதால், அவைகளின் வர்க்கங்களின் கூடுதலான Z மாறியானது, $(n-1)$ கட்டின்மை கொண்ட கைவர்க்க மாறியாகும் எனப் பெறுகிறோம்.

கை வர்க்கத்தின் பயன்முறைகள்

மாறுபாடுக்கான நம்பிக்கை இடைவெளி (Confidence interval for variance)

(i) X-மாறியானது இயல்நிலை $N(\mu, \sigma^2)$ மாறி எனவும், அதன் சராசரி μ-ன் மதிப்பு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது எனவும் கொள்வோம். இப்போது X-ன் மாறுபாடு σ^2-க்கு $(1-\alpha)$ சதவீத நம்பிக்கை இடைவெளியைப் பெறுவது பற்றி காண்போம்.

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ ஆகியன X பரவலிலிருந்து பெற்ற சம வாய்ப்புக் கூறு என்போம்.

இப்போது, கூறு அளவை $Y = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2}{\sigma_2}$ எடுத்துக்கொள் வோம். இதன் கூறு பரவல் 'n' கட்டின்மைகொண்ட கை வர்க்கப் பரவலாகும்.

$C_1 < C_2$ என அமையும், C_1, C_2 ஆகிய இரு மெய்யெண்களைக் கீழ்க்கண்ட

$$P_r\{ C_1 < Y < C_2 \} = \int_{C_1}^{C_2} \frac{1}{2^{n/2} \, \Gamma_{n/2}} \, e^{-\frac{y}{2}} \, y^{\frac{n}{2}-1} \, dy$$

$$= 1-\alpha, \quad 0 < \alpha < 1$$

நிபந்தனைக்குட்படும்படி எடுத்துக்கொள்வோம்.

இப்போது,

$$\text{நிகழ்ச்சி } (C_1 < Y < C_2) = \text{நிகழ்ச்சி} \left(C_1 < \frac{\Sigma (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} < C_2 \right)$$

$$= \text{நிகழ்ச்சி} \left[\frac{\Sigma (X_i - \mu)^2}{C_2} < \sigma^2 < \frac{\Sigma (X_i - \mu)^2}{C_1} \right]$$

ஆகும்.

ஆதலால், $$P_r \left\{ \frac{\Sigma (X_i - \mu)^2}{C_2} < \sigma^2 < \frac{\Sigma (X_i - \mu)^2}{C_1} \right\}$$

$$= P_r (C_1 < Y < C_2) = 1 - \alpha$$ ஆகும்.

இங்கு μ, C_1, C_2 ஆகியவைகள் தெரிந்த மதிப்புகளாதலால்

$$\frac{\Sigma (X_i - \mu)^2}{C_2}, \quad \frac{\Sigma (X_i - \mu)^2}{C_1}$$

ஆகியவைகள் சமவாய்ப்புக் கூறு மாறிகளான $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ஆகியவைகளின் சார்புகளாகின்றன.

$$\text{இடைவெளி} \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2}{C_2}, \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2}{C_1} \right]\text{-ஐ}$$

மாறுபாடு σ^2-ன் $(1-\alpha)$ சதவீத ராண்டம் இடைவெளி என்கிறோம்.

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ ஆகிய மாறிகளின் கண்டறிந்த மதிப்புகள் முறையே $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ எனில்,

$$a_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2}{C_2}, \quad a_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2}{C_1}$$

ஆகிய ஒவ்வொன்றும் ஒரு மெய்யெண்ணாகும். இவைகளைக் கொண்டு பெறும் இடைவெளி (a_1, a_2)-யை மாறுபாடு σ^2-க்கான $(1-\alpha)$ சதவீத நம்பிக்கை இடைவெளி என்கிறோம்.

பொதுவாக, C_1, C_2 ஆகிய இரு மதிப்புகளைக் கீழ்க்கண்ட

$$P_r\{ Y > C_2\} = \alpha/2$$
$$P_r\{ Y < C_1 \} = \alpha/2$$

நிபந்தனைகளுக்கு உட்படும்படி அமைத்துக் கொள்கிறோம்.

கணக்கு

ஓர் இயல் நிலை மாறி X-ன் சாரசரி மதிப்பு $\mu = 180$ எனவும், X பரவலிலிருந்து பெற்ற சமவாய்ப்புக் கூறு மாறிகளின் மதிப்புகள் $X_1 = 179$, $X_2 = 187$, $X_3 = 182$, $X_4 = 175$, $X_5 = 184$, $X_6 = 172$ எனவும் கொண்டு மாறியின் மாறுபாடு σ^2-க்கான 90% நம்பிக்கை இடைவெளியை அடைக.

முறை

இயல்நிலை மாறி X-ன் சராசரி மதிப்பு கொடுக்கப்பட்டிருப்பதால், கூறு அளவை Y-ன்

$$Y = \frac{\sum_{i=1}^{6} (X_i - \mu)^2}{\sigma^2}$$

பரவல் 6 கட்டின்மைகள் கொண்ட கைவர்க்க மாறியாகும். C_1, C_2 ஆகிய மெய்யெண்கள் கீழ்க்கண்ட நிபந்தனைகளுக்கு

$$P_r(Y < C_1) = \frac{0{\cdot}10}{2}, \quad P_r(Y > C_2) = \frac{0{\cdot}10}{2}$$

உட்படுகிறதெனில், அவைகளின் மதிப்புகளை $C_1 = 1.635$, $C_2 = 12.592$ கைவர்க்க அட்டவணையிலிருந்து பெறுகிறோம்.

இப்போது கூறு மாறிகளின் கண்டறிந்த மதிப்புகள் வாயிலாக

$\sum_{i=1}^{6} (X_i - \mu)^2 = 159$ எனப் பெறுகிறோம்.

மேலும், $$a_1 = \frac{\sum_{1}^{6} (X_i - \mu)^2}{C_2} = \frac{159}{12.592} = 12.627$$

$$a_2 = \frac{\sum_{1}^{6} (X_i - \mu)^2}{C_1} = \frac{159}{1.635} = 97.247$$

ஆகின்றன.

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட கூறு விவரங்களிலிருந்து X மாறியின் மாறுபாடு σ^2-க்கான 90% நம்பிக்கை இடைவெளி

$$12.627 < \sigma^2 < 97.247$$

ஆகும் என உய்த்துணருகிறோம்.

(ii) X-மாறியானது இயல்நிலை $N(\mu, \sigma^2)$ மாறி எனவும், அதன் சராசரி μ-ன் மதிப்பு தெரியாது எனவும் கொள்வோம். இப்போது X-ன் மாறுபாடு σ^2-க்கு $(1-\alpha)$ சதவீத நம்பிக்கை இடைவெளியைப் பெற, X பரவலிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட சமவாய்ப்புக் கூறு மாறி $X_1, X_2, \ldots, X_n$ களின் கூறு அளவை

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2}$$ எடுத்துக் கொள்வோம்.

இதன் கூறு பரவல் $(n-1)$ கட்டின்மைகொண்ட கைவர்க்கப் பரவலாகும். C_1, C_2 ஆகிய இரு மெய்யெண்களைக் கீழ்க்கண்ட

$$P_r\{C_1 < Z < C_2\} = \int_{C_1}^{C_2} \frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}} \left|\frac{n-1}{2}\right.} e^{-x/2} x^{\frac{n-3}{2}} dx$$

$$= 1-\alpha, \quad 0 < \alpha < 1$$

நிபந்தனைக்குட்படும்படி எடுத்துக் கொள்வோம்.

இப்போது, நிகழ்ச்சி $\{C_1 < Z < C_2\}$

$$= \text{நிகழ்ச்சி} \left\{\frac{\sum (X_i - \overline{X})^2}{C_2} < \sigma^2 < \frac{\sum (X_i - \overline{X})^2}{C_1}\right\}$$

ஆகும்.

ஆதலால், இடைவெளி

$$\left[\frac{\Sigma (X_i - \overline{X})^2}{C_2}, \frac{\Sigma (X_i - \overline{X})^2}{C_1}\right]$$ யானது

மாறுபாடு σ^2-க்கான $(1-\alpha)$ சதவீத ராண்டம் இடைவெளியாகும். மாறிகளின் கண்டறிந்த மதிப்புகளைப் பயன்படுத்தி,

$$a_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{C_2},$$

$$a_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{C_1}$$ ஆகிய மெய்யெண்களைப்பெற்று,

இடைவெளி (a_1, a_2)-ஐ மாறுபாடு σ^2-க்கான $(1-\alpha)$ சதவீத நம்பிக்கை இடைவெளி என்கிறோம்.

கணக்கு

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள கூறு விவரங்களிலிருந்து கூறு பிறந்த இயல்நிலைப் பரவலின் மாறுபாட்டிற்கான 95 சதவீத நம்பிக்கை இடைவெளியைப் பெறுக.

கூறு உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	=	17
கூறு உறுப்புகளின் கூடுதல்	=	333
கூறு உறுப்புகளின் வர்க்கங்களின் கூடுதல்	=	6773

முறை

கூறு பிறந்த இயல்நிலைப் பரவலின் சராசரி மதிப்பு கொடுக்கப் படாததால், கூறு அளவை Y-ன்

$$Y = \frac{\sum_{i=1}^{17} (x_i - \bar{x})^2}{\sigma^2}$$

பரவல், 16 கட்டின்மை கொண்ட கை வர்க்க மாறியாகும். C_1, C_2 ஆகிய மெய்யெண்கள் கீழ்க்கண்ட நிபந்தனைகளுக்கு

$$P_r\,(Y < C_1) = \frac{0{\cdot}05}{2}, \quad P_r\,(Y > C_2) = \frac{0{\cdot}05}{2}$$

உட்படுகிறதெனில், அவைகளின் மதிப்புகளை

$C_1 = 6{\cdot}908$, $C_2 = 28{\cdot}845$ கைவர்க்க அட்டவணையிலிருந்து பெறுகிறோம்.

இப்போது கூறு மாறிகளின் கண்டறிந்த மதிப்புகள் வாயிலாக $\sum_i (x_i - \bar{x})^2 = 250{\cdot}12$ எனப் பெறுகிறோம்.

மேலும்,

$$a_1 = \frac{\Sigma\,(X_i - \bar{x})^2}{C_2} = \frac{250{\cdot}12}{28{\cdot}845} = 8{\cdot}671$$

$$a_2 = \frac{\Sigma\,(X_i - \bar{x})^2}{C_1} = \frac{250{\cdot}12}{6{\cdot}908} = 36{\cdot}207$$

ஆகின்றன.

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட கூறு விவரங்களிலிருந்து பரவலின் மாறுபாடு σ^2-க்கான 95% நம்பிக்கை இடைவெளி

$$8{\cdot}671 < \sigma^2 < 36{\cdot}207$$

ஆகும் என உய்த்துணருகிறோம்.

மாறுபாட்டுக்கான சோதனை
(Test for Variance)

இயல்நிலை மாறி X-ன் மாறுபாடு σ^2 தெரியாதபோது அதன் மதிப்பு σ_0^2 எனக் கொள்ளலாமா என்பதை X பரவலிலிருந்து பெற்ற சமவாய்ப்புக் கூறு $X_1, X_2, \ldots, X_n$ வாயிலாக, α சதவீத மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்வதுபற்றி காண்போம்.

(i) முதலில் $\sigma^2 = \sigma_0^2$ எனும் சூனிய எடுகோளையும் இதற்கு எதிராக $\sigma^2 > \sigma_0^2$ எனும் மாற்று எடுகோளையும் அமைப்போம்.

அடுத்து கூறு அளவை Y-ஐ $Y = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{x})^2$

எடுத்துக் கொள்வோம். சூனிய எடுகோள் உண்மையாயின், கூறு அளவை Y ஆனது $(n-1)$ கட்டின்மை கொண்ட கைவர்க்க மாறியாகும்.

மாற்று எடுகோள் $\sigma^2 > \sigma_0^2$ என்பதால் தீர்வு கட்டமான வெளி Wஐ, $W = \{\, y : c \leq y < \infty \,\}$

கீழ்க்கண்ட,

$$P_r\,(Y \in W) = \int_{C}^{\infty} \frac{1}{2^{r/2}\,\lceil r/2} \, e^{-\frac{u}{2}} \, u^{\frac{r}{2}-1} \, du$$

$$= \alpha$$

நிபந்தனைக்குட்படும்படி எடுத்துக் கொள்கிறோம்.

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ ஆகிய மாறிகளின் கண்டறிந்த மதிப்புகள் முறையே $x_1, x_2, \ldots, x_n$ எனில்,

$Y = \dfrac{\Sigma (X_i - \bar{x})^2}{\sigma_0^2}$ ன் மதிப்பைக் கணக்கிட்டு, அம்மதிப்பானது தீர்வு கட்டமான வெளியில் அடங்கியிருக்குமெனில் சூனிய எடுகோள் மறுக்கத் தக்கது எனவும், அவ்வாறில்லையெனில் சூனிய எடுகோள் மறுக்கத் தகாதது எனவும் உய்த்துணருகிறோம்.

(ii) $\sigma^2 = \sigma_0^2$ எனும் சூனிய எடுகோளுக்கு எதிராக $\sigma^2 < \sigma_0^2$ எனும் மாற்று எடுகோளை அமைக்கும்போது,

தீர்வு கட்டமான வெளி W ஐ,

$$W = \{ y : 0 \leqslant y \leqslant d \}$$

கீழ்க்கண்ட

$$P_r (Y \in W) = \alpha$$

நிபந்தனைக்கு உட்படும்படி எடுத்துக்கொண்டு உய்த்துணருகிறோம்.

(iii) $\sigma^2 = \sigma_0^2$ எனும் சூனிய எடுகோளுக்கு எதிராக $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ எனும் மாற்று எடுகோளை அமைக்கும்போது,

தீர்வு கட்டமான வெளி W ஐ,

$$W = W_1 \cup W_2$$
$$W_1 = \{ y : 0 \leqslant y \leqslant a \}$$
$$W_2 = \{ y : b \leqslant y < \infty \}$$

கீழ்க்கண்ட நிபந்தனைகளுக்கு

$$P_r (Y \in W_1) = \alpha/2, \quad P_r (Y \in W_2) = \alpha/2$$

உட்படும்படி எடுத்துக்கொண்டு உய்த்துணருகிறோம்.

மேலே விளக்கப்பட்ட மாறுபாட்டுக்கான சோதனைகளை இயல்நிலை மாறி X-ன் சராசரி μ-ன் மதிப்பு தெரியாதபோது கையாளுகிறோம். மாறியின் சராசரி மதிப்பு μ_0 எனக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்போது, மாறுபாட்டுச் சோதனைக்கு ஏற்றதாகக் கூறு அளவை Y-ஐ

$$Y = \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_0)^2$$ எடுத்துக்கொள்கிறோம்.

சூனிய எடுகோள் $\sigma^2 = \sigma_0^2$ ஆனது உண்மையாயின் கூறு அளவை Y ஆனது 'n' கட்டின்மைகள் கொண்ட கை வர்க்க மாறியாக அமைகிறது.

(α) இப்போது மாற்று எடுகோள் $\sigma^2 > \sigma_0^2$ எனில்,

தீர்வு கட்டமான வெளி W-ஐ,

$$W = \{ y : \; c \leq y < \infty \}$$

கீழ்க்கண்ட நிபந்தனைக்கு

$$P_r (Y \in W) = \int_0^\infty \frac{1}{2^{n/2} \,\Gamma\, n/2} \; e^{-u/2} \; u^{\frac{n}{2}-1} \; du = \alpha$$

உட்படும்படி எடுத்துக்கொண்டு, Y மாறியின் கண்டறிந்த மதிப்பு தீர்வு கட்டமான வெளியில் உள்ளடங்கியிருப்பின் சூனிய எடுகோள் மறுக்கத்தக்கது எனவும், அவ்வாறில்லையெனில் சூனிய எடுகோள் மறுக்கத்தகாதது எனவும் உய்த்துணருகிறோம்.

(β) மாற்று எடுகோள் $\sigma^2 < \sigma_0^2$ எனில், தீர்வுகட்டமான வெளி W-ஐ, $W = \{ y : 0 \leq y \leq d \}$, கீழ்க்கண்ட நிபந்தனைக்கு

$$P_r \; (Y \in W) = \alpha$$

உட்படும்படி எடுத்துக்கொண்டு உய்த்துணருகிறோம்.

(γ) மாற்று எடுகோள் $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ எனில், தீர்வுகட்டமான வெளி

W-ஐ, $W = W_1 \cup W_2$

$$W_1 = \{ y : \; 0 \leq y \leq a \}$$

$$W_2 = \{ y : \; b \leq y \leq \infty \}$$

கீழ்க்கண்ட நிபந்தனைக்கு

$$P_r \; (Y \in W_1) = \alpha/2, \quad P_r \; (Y \in W_2) = \alpha/2$$

உட்படும்படி எடுத்துக்கொண்டு உய்த்துணருகிறோம்.

கணக்கு

ஓர் இயல்நிலைப் பரவலிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட 20 உறுப்புகள் கொண்ட சம வாய்ப்புக் கூறின் மாறுபாடு 1150 எனில், பரவலின் மாறுபாடு 676 எனக் கொள்ளலாமா என்பதை 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்க.

முறை

பரவலின் மாறுபாட்டை σ^2 எனக் குறிப்பிட்டு,

சூனிய எடுகோளின் கீழ் : $\sigma^2 = 676$ எனவும்,

மாற்று எடுகோளின் கீழ்: $\sigma^2 \neq 676$ எனவும்

கொள்வோம்.

கூறு அளவை Y-ன்

$$Y = \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{1}^{20} (X_i - \bar{x})^2$$

$$= \frac{20 \times 1150}{676}$$

$= 34{\cdot}02$ மதிப்பைப் பெறுகிறோம்.

சூனிய எடுகோளின் கீழ் Y மாறியின் பரவல் $n - 1 = 19$ கட்டின்மை கொண்ட கைவர்க்கப் பரவலாக அமைகிறது. C_1, C_2 ஆகிய மெய்யெண்கள் கீழ்க்கண்ட நிபந்தனைக்கு

$$P_r(Y < C_1) = \frac{0{\cdot}05}{2} \quad , \quad P_r(Y > C_2) = \frac{0.05}{2}$$

எனில், அவைகளின் மதிப்புகள்,

$$C_1 = 8{\cdot}907, \quad C_2 = 32{\cdot}852$$

என கைவர்க்க அட்டவணையிலிருந்து பெறுகிறோம்.

சோதனைக்கு ஏற்றதான தீர்வு கட்டமான வெளி

$$W = \{ y : 0 \leq y \leq 8{\cdot}907 \} \cup \{ y : 32{\cdot}852 \leq y < \infty \}$$

ஆகும்.

கூறு அளவையின் கண்டறிந்த மதிப்பு 34·02 ஆனது தீர்வு கட்டமான வெளியில் உள்ளடங்கியிருப்பதால், சூனிய எடுகோள் மறுக்கத் தக்கதென உய்த்துணருகிறோம். ஆகவே, கூறு பிறந்த இடைநிலைப் பரவலின் மாறுபாட்டின் மதிப்பு 676 எனக் கொள்ளலாகாது என 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் உய்த்துணருகிறோம்.

கணக்கு

ஓர் இயந்திரம் உற்பத்தி செய்யும் திருகு மறைகளின் எடை மதிப்புப் பரவலின் மாறுபாடு 6 (கிராம்கள்)^2 எனவும், இம் மாறுபாட்டு மதிப்பைக் குறைக்கும் நோக்கத்துடன் இயந்திரத்தை மாற்றி அமைக்கப்பட்டதெனவும், மாற்றி அமைக்கப்பட்டபின் உற்பத்தி செய்யப்பட்ட திருகு மறைகளிலிருந்து பெற்ற கூறு திருகு மறைகளின் எடை மதிப்புகள் கீழ்க்கண்டனவெனவும் கொள்க.

கூறு மதிப்புகளின் கூடுதல் = 32 கிராம்கள்
கூறுமதிப்புகளின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் = 258 (கிராம்கள்)^2
கூறு உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை = 8

கூறு விவரங்களின் வாயிலாக இயந்திரம் மாற்றியமைக்கப்பட்டபின் உற்பத்தியாகும் திருகு மறைகளின் எடை மதிப்புப் பரவலின் மாறுபாடு 6 கிராம்களுக்குக் குறைவாக உள்ளதா என 5 சதவீத மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் ஆய்வு பெறுக.

முறை

இயந்திரம் உற்பத்தி செய்யும் திருகு மறைகளின் எடை மதிப்புப் பரவலின் மாறுபாட்டை σ^2 எனக் குறிப்பிடுவோம். இயந்திரம் மாற்றி அமைக்கப்பட்டபின் உற்பத்தி செய்யப்பட்ட திருகு மறைகளின் எடை மதிப்புப் பரவலின் மாறுபாடு $\sigma^2 = 6$ எனும் சூனிய எடுகோளையும், அதற்கு எதிராக $\sigma^2 < 6$ எனும் மாற்று எடுகோளையும் அமைத்துக் கொள்வோம்.

கொடுக்கப்பட்ட கூறு விவரங்கள் வாயிலாகக் கூறு அளவை Y-ன்

$$Y = \frac{\sum_{1}^{8}(X_i - \bar{x})^2}{\sigma^2}$$

$$= \frac{130}{36}$$

$$= 3{\cdot}61$$

மதிப்பைப் பெறுகிறோம்.

சூனிய எடுகோளின் கீழ் Y மாறியின் பரவல் $n - 1 = 7$ கட்டின்மைகள் கொண்ட கைவர்க்கப் பரவலாகும்.

மெய்யெண் d கீழ்க்கண்ட நிபந்தனைக்கு

$$P_r\,(Y \leq d) = 0{\cdot}05$$

உட்பட்டு அமைகிறதெனில் அதன் மதிப்பு $2{\cdot}167$ என கைவர்க்க அட்டவணையிலிருந்து பெறுகிறோம்.

சோதனைக்கு ஏற்றதான தீர்வு கட்டமான வெளி

$$W = \{\, y : 0 \leq y \leq d \,\}$$
$$= \{\, y : 0 \leq y \leq 2{\cdot}167 \,\}$$

ஆகும்.

கூறு அளவையின் கண்டறிந்த மதிப்பு 3·61 ஆனது தீர்வு கட்டமான வெளியில் அடங்கியிராததால், சூனிய எடுகோள் மறுக்கத்தகாதது என உய்த்துணருகிறோம். ஆகவே, கொடுக்கப் பட்ட கூறு விவரங்களிலிருந்து இயந்திரம் மாற்றியமைக்கப் பட்டபின்பு உற்பத்தி செய்யப்படும் திருகு மறைகளின் எடை மதிப்புப் பரவலின் மாறுபாடு 6 (கிராம்கள்)^2-க்குக் குறைவாக ஏற்படவில்லை என 5 சதவீத மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் உய்த்துணருகிறோம்.

பரவல்
(t - Distribution)

தேற்றம் 1

$X, Y_1, Y_2, \ldots\ldots, Y_n$ ஆகியன $(n+1)$ சார்பற்ற, முழுதொத்த இயல்நிலை $N(0, \sigma^2)$ மாறிகள் எனவும்,

$$Y = \sqrt{\frac{1}{n}(Y_1^2 + Y_2^2 + \ldots\ldots + Y_n^2)}$$

எனவும் கொள்ளும்போது ராண்டம் மாறி U-ன்

$$U = \frac{X}{Y} = \frac{X}{\sqrt{\frac{1}{n}(Y_1^2 + Y_2^2 + \ldots + Y_n^2)}}$$

நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்

$$g_u(u) = \frac{\left\lceil\frac{n+1}{2}\right.}{\sqrt{\pi n}\left\lceil\frac{n}{2}\right.} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{u^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}\;;\; -\infty < u < \infty$$

ஆகும்.

தெரிப்பு

$Y_1, Y_2, \ldots\ldots, Y_n$ ஆகியவைகள் சார்பற்ற முழுதொத்த இயல்நிலை $N(0, \sigma^2)$ மாறிகளாதலால் $\left(\frac{Y_1^2 + Y_2^2 + \ldots\ldots + Y_n^2}{\sigma^2}\right)$ மாறி n கட்டுல்மைகொண்ட "கைவர்க்க" மாறியாகும். எனவே,

$$Y = \sqrt{\frac{1}{n}(Y_1^2 + Y_2^2 + \ldots\ldots + Y_n^2)}$$ மாறியின்

பரவல்

$$f_y(y) = \frac{n^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n-2}{2}}\sigma^n \left|\frac{n}{2}\right.} e^{-\frac{ny^2}{2\sigma^2}} y^{n-1}; \quad 0 < y < \infty$$

$= 0,$ மற்றபடி

X, Y ஆகியவைகள் சார்பற்ற மாறிகளாதலால் அவைகளின் இணைந்த நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்

$$f_{xy}(x, y) = f_x(x) f_y(y)$$

$$= \frac{n^{\frac{n}{2}}}{\sigma^n \sqrt{\pi}\, 2^{\frac{n-1}{2}} \left|\frac{n}{2}\right.} y^{n-1} e^{\frac{-(ny^2+x^2)}{2\sigma^2}}$$

$$-\infty < x < \infty; \quad 0 < y < \infty$$

$= 0,$ மற்றபடி

இப்போது $U = \frac{X}{Y}$: $V = Y$ ஆகிய சார்புகளை எடுத்துக்கொள் வோம்.

X, Y மாறிகளின் வெளி $A = \left\{(x, y): \begin{array}{r} -\infty < x < \infty \\ 0 < y < \infty \end{array}\right\}$

ஆக அமைவதால்

U, V மாறிகளின் வெளி $B = \left\{u, v: \begin{array}{r} -\infty < u < \infty \\ 0 < v < \infty \end{array}\right\}$ ஆகும்.

$u = \frac{x}{y}$; $v = y$ ஆகிய சார்புகள் A, B கணப்பகுதிகளின் ஒன்றுக் கொன்றான உருமாற்றமாகும். எனவே, இச்சார்புகளின் எதிர்மாறான சார்புகள் $x = u, v$; $y = v$ ஆகின்றன. மேலும், உருமாற்றத்தின் ஜாக்கோபியன்

$$J = \begin{vmatrix} v & u \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = v$$ ஆகும்.

எனவே U, V மாறிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்

$$h_{uv}(u\,v) = \frac{n^{\frac{n}{2}}}{\sigma^n \sqrt{\pi}\; 2^{\frac{n-1}{2}} \left|\frac{n}{2}\right.}\; e^{\frac{-(n+u^2)\,v^2}{2\sigma^2}}\; v^n\,;$$

$$-\infty < u < \infty$$
$$0 < v < \infty$$

$= \quad 0,$ மற்றபடி.

U-யின் இறுதிநிலைப் பரவல்

$$g_u(u) = \int_0^\infty h(u, v)\, d\,v$$

$$= \frac{n^{\frac{n}{2}}}{\sigma^n \sqrt{\pi}\; 2^{\frac{n-1}{2}} \left|\frac{n}{2}\right.} \int_0^\infty e^{\frac{-(n+u^2)}{2\sigma^2} v^2}\, v^n\, dv$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n\,\pi}}\; \frac{\left|\left(\frac{n+1}{2}\right)\right.}{\left|\left(\frac{n}{2}\right)\right.} \left(1+\frac{u^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}\,;$$

$$-\infty < u < \infty$$

$= \quad 0,$ மற்றபடி

ஆகும்.

இந்த நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவலை "n" கட்டின்மை கொண்ட "t-பரவல்" அல்லது "ஸ்டூடண்ட் பரவல்" என அழைக்கிறோம்.

$X, Y_1, Y_2, \ldots\ldots, Y_n$ ஆகிய மாறிகளின் சுட்டுறுப்பு σ^2 ஆக அமைந்திருப்பினும் அவைகளின் சார்பான U-மாறியின்

$$U = \frac{X}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_1^n y_i^2}}$$

நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவலானது சுட்டுறுப்பு σ^2-ஐச் சாராதிருப்பது இப்பரவலின் ஒரு சிறப்புப் பண்பாகும்.

வரையறை : t-ராண்டம் மாறி $X, Y_1, Y_2, \ldots\ldots, Y_n$ ஆகியன $(n+1)$ சார்பற்ற முழுதொத்த இயல்நிலை $N(1, \sigma^2)$ மாறிகளெனில் ராண்டம்மாறி U-ஆனது

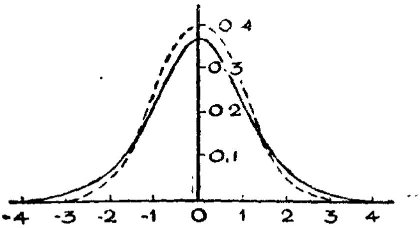
$$U = \frac{X}{Y} = \frac{(X/\sigma)}{\sqrt{\frac{1}{n\sigma^2}(Y_1^2 + Y_2^2 + \ldots\ldots + Y_n^2)}}$$ ஆகும்.

இங்கு $V = \dfrac{X}{\sigma}$ மாறியானது, திட்ட இயல்நிலை $N(0, 1)$ மாறியாகவும், $W = \dfrac{1}{\sigma^2}(Y_1^2 + Y_2^2 + \ldots + Y_n^2)$ மாறியானது n கட்டின்மை கொண்ட கைவர்க்க மாறியாகவும் ஆகும்.

ஆதலால் $$U = \frac{V}{\sqrt{\frac{W}{n}}}$$ ஆகும்.

இதன் பரவலை t-பரவல் என வழங்குவதால், ராண்டம் மாறி t-ஐக் கீழ்க்கண்டவாறு வரையறுக்கிறோம்.

ξ மாறியானது, திட்ட இயல்நிலை $N(0, 1)$ மாறியாகவும், η மாறியானது K கட்டின்மை கொண்ட கைவர்க்க மாறியாகவும், இவ்விருமாறிகள் சார்பற்றனவாகவும் எடுத்துக் கொள்ளும்போது $\dfrac{\xi}{\sqrt{\frac{\eta}{K}}}$ மாறியை K கட்டின்மை கொண்ட t-மாறி என வரையறுக்கிறோம்.



படம் 6.2

———திட்ட இயல்நிலை அடர்த்திப் பரவல்
............கட்டின்மைகள் கொண்ட t அடர்த்திப் பரவல்

கட்டின்மை $K=4$ மதிப்பைக் கொண்ட t-மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்தி வளைவு கோடு படம் 6.2-ல் காட்டியவாறு அமைகிறது.

t-மாறியின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை

n கட்டின்மை கொண்ட t-மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்

$$f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

$$-\infty < x < \infty$$

ஆகும்.

இப்பரவல் $x = 0$ எனும் புள்ளியைக் குறித்துச் சமச்சீருள்ளதாக (Symmetrical) அமைகிறது.

பரவலின் r ஆவது விலக்கப் பெருக்குத் தொகை

$$\mu_r = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f_t(x)\, dx \text{ ஆகும்.}$$

இத் தொகை (Integral) யானது, $r < n$ என அமையும்போது மட்டுமே ஒருங்கும் (Convergent) தொகையாக அமைகிறது. எனவே, $r < n$ எனில், r ஆவது விலக்கப் பெருக்குத் தொகை முடிவுள்ள (finite) மதிப்பாகிறது.

பரவல் சமச்சீருள்ளதால்

$$\mu_{2r+1} = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2r+1} f(x)\, dx = 0; \quad 2r+1 < n;$$

$$r = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots$$

இப்போது

$$\mu_{2r} = \int_{\infty}^{\infty} x^{2r} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}\, dx$$

$$= 2 \int_0^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{x^{2r}}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}\, dx$$

$$= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots\ldots (2r-1)\, n^r}{(n-2)(n-4) \ldots\ldots (n-2r)}\,; \qquad 2r < n,$$

$$r = 0, 1, 2, \ldots$$

n கட்டின்மை கொண்ட t-மாறியின்

சராசரி $= 0, \quad n > 1$

மாறுபாடு $= \dfrac{n}{n-2}$, $n > 2$ ஆக அமைகின்றன.

n கட்டின்மை கொண்ட t-மாறி இடைவெளி $(-K\alpha\,;\,K\alpha)$-யின் புறத்தேயுள்ள மதிப்புகளை ஏற்கும் நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு

$$P_r\,(\,|\,t\,|\, > K\alpha)$$

$$= 1 - \int_{-K\alpha}^{K\alpha} \frac{1}{\sqrt{n\pi}}\, \frac{\left\lceil \frac{n+1}{2} \right.}{\left\lceil \frac{n}{2} \right.}\, (1 + x^2)^{\frac{-(n+1)}{2}}\, dx$$

$$\doteq \alpha \qquad 0 < \alpha < 1$$

எனக் கொள்வோம். நிலையெண் $K\alpha$-ஐ n கட்டின்மை கொண்ட t-பரவலின் 100 α சதவீதப் புள்ளி என அழைக்கிறோம். n = 1, 2, ... ; α = ·01, ·02, ... ஆகிய மதிப்புகளுக்கு இணையான t-மாறிகளின் 100 α சதவீதப் புள்ளிகள். அதாவது, $K\alpha$ மதிப்புக்கள் பியர்சன்—யேட்ஸ், பையோமெட்ரிகா ஆகிய புள்ளியியல் அட்டவணைப் புத்தகங்களில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

தேற்றம் 2

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ ஆகியவைகள் இயல்நிலைப் பரவலில் $N(\mu, \sigma^2)$ இருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட சமவாய்ப்புக் கூறு எனக் கொள்வோம். கூறின் சராசரி, திட்ட விலக்கம் ஆகியவைகளை முறையே

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i\,; \quad S = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}$$

எனக் குறிக்கும்போது

$\dfrac{(\bar{X} - \mu)\sqrt{n-1}}{S}$ மாறியானது $(n-1)$ கட்டின்மை கொண்ட t-மாறியாகும்.

தெரிப்பு

$\sqrt{n}\ (\bar{X} - \mu)$ மாறியானது இயல்நிலை $N\ (0, \sigma^2)$ மாறி எனவும், $nS^2 = \Sigma\ (X_i - \bar{X})^2$ மாறியானது $Y_2, Y_3, \ldots\ldots, Y_n$ ஆகிய $(n-1)$ சார்பற்ற முழுதொத்த இயல்நிலை $N\,(0, \sigma^2)$ மாறிகளின் வர்க்கக் கூடுதல் எனவும், $\bar{X}$, S^2 ஆகிய இருமாறிகளும் சார்பற்றன எனவும் முன்பே நிறுவியுள்ளோம். எனவே தேற்றம் 1-ன் படி

$$\frac{\sqrt{n}\ (\bar{X} - \mu)}{\sqrt{\dfrac{\Sigma\ (X_i - \bar{X})^2}{(n-1)}}} = \frac{(\bar{X} - \mu)\ \sqrt{n-1}}{S}$$

மாறியானது $(n-1)$ கட்டின்மை கொண்ட t-மாறியாகும்.

தேற்றம் 3

$X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ ஆகியவைகள் சார்பற்ற முழுதொத்த இயல்நிலை $N\,(\mu_x, \sigma^2)$ மாறிகள் எனவும், $Y_1, Y_2, \ldots\ldots, Y_m$ ஆகியவைகள் சார்பற்ற முழுதொத்த இயல்நிலை $N\,(\mu_y, \sigma^2)$ மாறிகள் எனவும், X-மாறிகளும் Y மாறிகளும் சார்பற்றன எனவும் கொள்க. மாறிகளின் சராசரிகள் மாறுபாடுகள் ஆகியவைகளை

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_1^n X_i \ ; \ \bar{Y} = \frac{1}{m} \sum_1^m Y_i$$

$$S_x^2 = \frac{1}{n} \sum_1^n (X_i - \bar{X})^2 \ ; \quad S_y^2 = \frac{1}{m} \sum_1^m (Y_i - \bar{Y})^2$$

எனக் குறிப்போம். அப்போது

$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\dfrac{nS_x^2 + m\,S_y^2}{n+m-2}\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m}\right)}}$$

மாறியானது, $(m+n-2)$ கட்டின்மை கொண்ட t-மாறியாகும்.

தெரிப்பு

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ ஆகியவைகள் சார்பற்ற முழுதொத்த இயல்நிலை $N\ (\mu_x, \sigma^2)$ மாறிகளாதலால் $\sqrt{n}\,(\bar{X} - \mu_x)$ மாறியானது இயல்நிலை $N\ (0, \sigma^2)$ மாறியாகவும், $n\,S_x^2$ மாறியானது $(n-1)$ சார்பற்ற இயல்நிலை $N\,(0, \sigma^2)$ மாறிகளின் வர்க்கக் கூடுதல் ஆகவும், $\bar{X}$, S_x^2 ஆகிய இருமாறிகளும் சார்பற்றனவாகவும் அமைகின்றன. இது போன்றே $\sqrt{m}\ (\bar{Y} - \mu_y)$ மாறியானது இயல்நிலை $N\,(0, \sigma^2)$ மாறியாகவும் $m\,S_y^2$ மாறியானது $(m-1)$

சார்பற்ற இயல்நிலை $N\ (0, \sigma^2)$ மாறிகளின் வர்க்கக் கூடுதல் ஆகவும், $\bar{Y}$, S_y^2 ஆகிய இரு மாறிகளும் சார்பற்றனவாகவும் அமைகின்றன. $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ மாறிகளும் $Y_1, Y_2, \ldots\ldots, Y_m$ மாறிகளும் சார்பற்றனவாதலால் அவைகளின் சார்புகள் $\bar{X}, \bar{Y}, S_x^2, S_y^2$ ஆகியவைகள் அனைத்தும் சார்பற்ற மாறிகளாகின்றன. $(\bar{X} - \mu_x)$ மாறியானது இயல்நிலை $N\left(0, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ மாறியாகவும், $(\bar{Y} - \mu_y)$ மாறியானது இயல்நிலை $N\left(0, \dfrac{\sigma^2}{m}\right)$ மாறியாகவும் அமைவதால் $(\bar{X} - \mu_x) - (\bar{Y} - \mu_y) = (\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_x - \mu_y)$ மாறியானது இயல்நிலை $N\left[0,\ \sigma^2\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m}\right)\right]$ மாறியாகும்.

$$\text{எனவே, } V = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}\right)}}$$

மாறியானது இயல்நிலை $N\ (0, \sigma^2)$ மாறியாக அமைகிறது. இப்போது $W = (n\,S_x^2 + m\,S_y^2)$ மாறியானது $(m+n-2)$ சார்பற்ற இயல்நிலை $N\ (0, \sigma^2)$ மாறிகளின் வர்க்கங்களின் கூடுதலாகும். எனவே, தேற்றம் 1-ன் படி, Z-மாறியானது

$$Z = \frac{V}{\sqrt{W/(m+n-2)}} = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\dfrac{n\,S_x^2 + m\,S_y^2}{(m+n-2)}\left(\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}\right)}}$$

$(m + n - 2)$ கட்டின்மை கொண்ட t − மாறியாகும்.

t-பரவலின் பயன் முறைகள்

சராசரிக்கான நம்பிக்கை இடைவெளி (Confidence interval for mean)

X மாறியானது இயல்நிலை $N(\mu, \sigma^2)$ மாறி என்போம். சுட்டுறுப்பு μ-க்கு அதாவது, X மாறியின் சராசரிக்கு $(1 - \alpha)$ சதவீத நம்பிக்கை இடைவெளியைப் பெறுவது பற்றி காண்போம்.

X பரவலிலிருந்து பெற்ற சமவாய்ப்புக் கூறுமாறிகள் $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ ஆகியவைகளின் சராசரி, மாறுபாடு ஆகியவைகள் முறையே $\bar{X} = \dfrac{1}{n} \sum_1^n X_i$; $S^2 = \dfrac{1}{n} \sum_1^n (X_i - \bar{X})^2$ என்போம்.

கூறு அளவை Y-ஐ $Y = \frac{(\bar{X}-\mu)\sqrt{n-1}}{S}$ எடுத்துக் கொள்வோம்.

இதன் கூறுபரவல் $r = (n-1)$ கட்டின்மை கொண்ட t பரவலாகும். $C_1 < C_2$ என்று அமையும் C_1, C_2 ஆகிய இரு மெய்யெண்களைக் கீழ்க்கண்ட

$$P_r(C_1 < Y < C_2) = \int_{C_1}^{C_2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\left|\frac{r+1}{2}\right.}{\left|\frac{r}{2}\right.} \left(1+\frac{y^2}{r}\right)^{-\frac{r+1}{2}} dy$$

$$= (1-\alpha), \qquad 0 < \alpha < 1$$

நிபந்தனைக்குட்படும்படி எடுத்துக் கொள்வோம்.

இப்போது, நிகழ்ச்சி $(C_1 < Y < C_2)$

$$= \text{நிகழ்ச்சி}\left(C_1 < \frac{(\bar{X}-\mu)\sqrt{n-1}}{S} < C_2\right)$$

$$= \text{நிகழ்ச்சி}\left(\bar{X} - C_2 \frac{S}{\sqrt{n-1}} < \mu < \bar{X} - C_1 \frac{S}{\sqrt{n-1}}\right)$$

ஆகும்.

ஆதலால்

$$P_r(C_1 < Y < C_2) = P_r\left[\bar{X} - C_2 \frac{S}{\sqrt{n-1}} < \mu < \bar{X} - C_1 \frac{S}{\sqrt{n-1}}\right]$$

$$= (1-\alpha)$$

இங்கு C_1, C_2 ஆகியவைகளின் மதிப்பு தெரிந்த மெய்யெண்களாதலால் $\bar{X} - C_2 \frac{S}{\sqrt{n-1}}$; $\bar{X} - C_1 \frac{S}{\sqrt{n-1}}$ ஆகியவைகள் கூறு அளவைகளாகின்றன.

இடைவெளி $\left[\bar{X}-C_2\frac{S}{\sqrt{n-1}} ; \bar{X}-C_1\frac{S}{\sqrt{n-1}}\right]$ யானது சராசரி μ-க்கான $(1-\alpha)$ சதவீத ராண்டம் இடைவெளியாகும் என்கிறோம்

கூறு மாறிகளின் கண்டறிந்த மதிப்புக்கள் $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ ஆகியவைகளைக் கொண்டு a_1, a_2 மெய்யெண்களை

$$a_1 = \left(\bar{x} - C_2 \frac{s}{\sqrt{n-1}}\right) \; ; \quad a_2 = \left(\bar{x} - C_1 \frac{s}{\sqrt{n-1}}\right)$$ பெறுகிறோம்.

இடைவெளி $(a_1; a_2)$ யைச் சராசரி μ க்கான $(1-\alpha)$ சதவீத நம்பிக்கை இடைவெளி என்கிறோம். பொதுவாக C_1, C_2 ஆகியவைகளை

$$P_r\,(Y > C_2) = P_r\,(Y < C_1) = \alpha/2$$

நிபந்தனைக்குட்படும்படி எடுத்துக் கொள்கிறோம்.

கணக்கு

ஓர் இயல்நிலைப் பரவலிலிருந்து பெற்ற சமவாய்ப்புக் கூறு உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை 10, கூறு சராசரியின் மதிப்பு 44·2, கூறு திட்டவிலக்கத்தின் மதிப்பு 2·7 எனில், பரவலின் சராசரிக்கான 95% நம்பிக்கை இடைவெளியைப் பெறுக.

முறை

இங்கு கூறு உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை $n = 10$
கூறு சராசரி $\bar{X} = 44{\cdot}2$
கூறு திட்ட விலக்கம் $s = 2{\cdot}7$

ஆகும்.

இப்போது ராண்டம் மாறி Y-ன் பரவல், 9 கட்டின்மை கொண்ட t-பரவலாக அமையும்போது, C_1, C_2 ஆகிய மெய்யெண்கள் கீழ்க்கண்ட

$$P_r\,(Y > C_2) = P_r\,(Y < C_1) = \frac{0{\cdot}05}{2}$$

நிபந்தனைக்குட்படுகிறதெனில்

$$C_2 = 2{\cdot}26 \;,\quad C_1 = -2{\cdot}26$$

என t-பரவலின் அட்டவணையிலிருந்து பெறுகிறோம்.

எனவே,

$$\begin{aligned} a_1 &= \bar{x} - C_2 \frac{s}{\sqrt{n-1}} \\ &= 44{\cdot}2 - 2{\cdot}034 \\ &= 43{\cdot}966 \end{aligned}$$

$$a_2 = \bar{x} - C_1 \frac{s}{\sqrt{n-1}}$$
$$= 44{\cdot}2 + 2{\cdot}26 \left(\frac{2{\cdot}7}{3}\right)$$
$$= 44{\cdot}2 + 2{\cdot}034$$
$$= 46{\cdot}234$$

ஆகின்றன.

இப்போது, பரவலின் சராசரி μ-க்கான 95% நம்பிக்கை இடைவெளி

$$43{\cdot}966 \leq \mu \leq 46{\cdot}234$$

ஆகும் என உய்த்துணருகிறோம்.

இரு சராசரிகளின் வேறுபாட்டிற்கான நம்பிக்கை இடைவெளி (Confidence interval for the difference between two means)

X, Y மாறிகள் முறையே இயல்நிலை $N(\mu_x, \sigma^2)$, $N(\mu_y, \sigma^2)$ மாறிகள் என்போம். சராசரிகளின் வேறுபாடு $(\mu_x - \mu_y)$-க்கு $(1-\alpha)$ சதவீத நம்பிக்கை இடைவெளியைப் பெறுவதுபற்றி காண்போம்.

X–பரவலிலிருந்து பெற்ற சமவாய்ப்புக் கூறு மாறிகள் $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ ஆகியவைகளின் சராசரி, மாறுபாடு முறையே

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_1^n X_i \quad ; \quad S_x^2 = \frac{1}{n} \sum_1^n (X_i - \bar{X})^2$$

எனவும், Y பரவலிலிருந்து பெற்ற சமவாய்ப்புக்கூறு மாறிகள் $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ ஆகியவைகளின் சராசரி மாறுபாடு முறையே

$$\bar{Y} = \frac{1}{m} \sum_1^m Y_i \; ; \; S_y^2 = \frac{1}{m} \sum_1^m (Y_i - \bar{Y})^2$$

எனவும் குறிப்போம்.

கூறு அளவை V-ஐ

$$V = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\dfrac{n S_x^2 + m S_y^2}{m+n-2} \left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m}\right)}} \quad \text{என}$$

எடுத்துக் கொள்வோம். இதன் கூறுபரவல் $\gamma = (m+n-2)$ கட்டின்மை கொண்ட 't' பரவலாகும்.

$C_1 < C_2$ என அமையும் C_1, C_2 ஆகிய இரு மெய்யெண்களை

$$P_r\,(C_1 < V < C_2) = \int_{C_1}^{C_2} f_v\,(v)\,dv = 1-\alpha$$

நிபந்தனைக்குட்படும்படி எடுத்துக்கொள்வோம். இங்கு $f_v\ (v)$ ஆனது V-மாறியின் பரவலாகும்.

இப்போது

$$P_r\,(C_1 < V < C_2) = P_r\,[(\bar{X}-\bar{Y}) - C_2\,W < (\mu_x-\mu_y) < (\bar{X}-\bar{Y})-C_1\,W]$$

$$\text{இங்கு}\quad W = \sqrt{\frac{n\,S_x^2+m\,S_y^2}{m+n-2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)}$$

ஆகும்.

$(\bar{X}-\bar{Y}-C_2\,W)$, $(\bar{X}-\bar{Y}-C_1\,W)$ ஆகிய கூறு சார்புகளைக் கொண்டு பெறும் இடைவெளி

$$[(\bar{X}-\bar{Y}-C_2\,W),\ (\bar{X}-\bar{Y}-C_1\,W)]$$

ஆனது சராசரிகளின் வேறுபாடு $(\mu_x-\mu_y)$ க்கான $(1-\alpha)$ சதவீத ராண்டம் இடைவெளி என்கிறோம்.

X கூறுமாறிகளின் கண்டறிந்த மதிப்புகள் $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$; Y கூறுமாறிகளின் கண்டறிந்த மதிப்புகள் $y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n$ ஆகியவைகளைக் கொண்டு a_1, a_2 மெய்யெண்களை

$$a_1 = (x-\bar{y}-C_2\,W)\ ;\quad a_2 = (x-\bar{y}-C_1\,W)$$

பெற்று இடைவெளி (a_1, a_2)யைச் சராசரிகளின் வேறுபாடு $(\mu_x-\mu_y)$ க்கான $(1-\alpha)$ நம்பிக்கை இடைவெளி என்கிறோம்.

பொதுவாக C_1, C_2 ஆகியவைகளை

$$P_r\,(V > C_2) = P_r\,(V < C_1) = \frac{\alpha}{2}$$

நிபந்தனைக்குட்படும்படி எடுத்துக்கொள்கிறோம்.

கணக்கு

இரு இயல் நிலைப் பரவல்களிலிருந்து பெற்ற சமவாய்ப்புக் கூறுகளின் விவரங்கள் பின்புறம் தரப்பட்டுள்ளன.

	பரவல் A	பரவல் B
கூறு உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	10	7
கூறு சராசரி	142	134
கூறு மாறுபாடு	49	32

இவ்விவரங்களின் வாயிலாக இரு பரவல் சராசரிகளின் வேறுபாட்டிற்கான 90% நம்பிக்கை இடைவெளியைப் பெறுக.

முறை

பரவல் A-ன் சராசரி μ_1 எனவும், பரவல் B-ன் சராசரி μ_2 எனவும் குறிப்பிடுவோம். பரவல் Aயிலிருந்து பெற்ற சமவாய்ப்புக் கூறு உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை சராசரி, மாறுபாடு ஆகியவைகளை முறையே n, $\bar{X}$, S_x^2 எனக் குறிப்பிடும் போது, அவைகளின் கண்டறிந்த மதிப்புகள் முறையே 10, 142, 49 ஆக அமைகின்றன. பரவல் Bயிலிருந்து பெற்ற சமவாய்ப்புக் கூறு உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை, சராசரி, மாறுபாடு ஆகியவைகளை முறையே m, $\bar{Y}$, S_y^2 எனக் குறிப்பிடும்போது, அவைகளின் கண்டறிந்த மதிப்புகள் முறையே 7, 134, 32 ஆக அமைகின்றன.

இப்போது,

$$W = \sqrt{\frac{n\,S_x^2 + mS_y^2}{n+m-2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{(10\times 142) + (7\times 134)}{10+7-2}\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{7}\right)}$$

$$= 6.179$$

ஆகும்.

ராண்டம் மாறி V-ன் பரவல் $m+n-2 = 15$ கட்டின்மை கொண்ட t பரவலாக அமையும்போது C_1, C_2 ஆகிய மெய்யெண்கள்

$$P_r(V > C_2) = P_r(V < C_1) = \frac{0{\cdot}10}{2}$$

என நிபந்தனைக்குட்படுகிறதெனில், அவைகளின் மதிப்புகள்

$$C_2 = 1{\cdot}75, \qquad C_1 = -1{\cdot}75$$

என t அட்டவணையிலிருந்து பெறுகிறோம்.

எனவே,

$$a_1 = \bar{x} - \bar{y} - C_2 W$$
$$= 142 - 134 - (1{\cdot}75 \times 6{\cdot}179)$$
$$= -2{\cdot}81$$

$$a_2 = \bar{x} - \bar{y} - C_1 W$$
$$= 142 - 134 - (-1{\cdot}75 \times 6{\cdot}179)$$
$$= 18{\cdot}81$$

இப்போது, இரு பரவல் சராசரிகளின் வேறுபாடு $(\mu_1 - \mu_2)$க்கான 90% நம்பிக்கை இடைவெளி

$$-2{\cdot}81 < \mu_1 - \mu_2 < 18{\cdot}81$$

ஆகும் என உய்த்துணருகிறோம்.

சராசரிக்கான சோதனை (Test for mean)

X மாறியானது இயல்நிலை $N(\mu, \sigma^2)$ மாறி என்போம். சராசரி μ தெரியாதபோது அது மெய்யெண் μ_0 மதிப்பை ஏற்குமா அல்லது அம்மதிப்பிலிருந்து வேறுபட்ட மதிப்பை ஏற்குமா என சமவாய்ப்புக் கூறு $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ மாறிகள் வாயிலாக 100 α சதவீத மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்வது பற்றி காண்போம்.

(i) முதலில் $\mu = \mu_0$ எனும் சூனிய எடுகோளையும் இதற்கு எதிராக $\mu > \mu_0$ எனும் மாற்று எடுகோளையும் அமைப்போம்.

அடுத்து கூறு அளவை Y-ஐ

$$Y = \frac{(\bar{X} - \mu_0)\sqrt{n-1}}{\sqrt{\frac{1}{n}\Sigma(X_i - \bar{X})^2}} = \frac{(\bar{X} - \mu_0)\sqrt{(n-1)}}{S}$$

எடுத்துக்கொள்வோம். சூனிய எடுகோள் உண்மையாயின் Y-மாறியானது $\gamma = (n-1)$ கட்டின்மை கொண்ட 't' மாறியாகும்.

மாற்று எடுகோள் $\mu > \mu_0$ என்பதால் தீர்வு கட்டமான வெளி $w = \{ y : C \leq y < \infty \}$-ஐ

$$P_r(C \leq Y < \infty) = \int_C^\infty f_Y(y)\, dy = \alpha$$

நிபந்தனைக்குட்படும்படி பெறுகிறோம். இங்கு $f_Y(y)$ ஆனது Y–மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவலாகும்.

சமவாய்ப்புக் கூறு மாறிகளின் கண்டறிந்த மதிப்புகளைக் கொண்டு

$$y = \frac{(\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n-1}}{\sqrt{\frac{1}{n}\Sigma(x_i - \bar{x})^2}}$$

மதிப்பைக் கணக்கிட்டு அது தீர்வுகட்டமான வெளியில் அடங்கியிருப்பின் சூனிய எடுகோள் மறுக்கத்தக்கது எனவும், அவ்வாறில்லையெனில் சூனிய எடுகோள் மறுக்கத்தகாதது எனவும் உய்த்துணருகிறோம்.

(ii) $\mu = \mu_0$ எனும் சூனிய எடுகோளுக்கு எதிராக $\mu < \mu_0$ எனும் மாற்று எடுகோளை அமைக்கும்போது, $\gamma = (n-1)$ கட்டின்மை கொண்ட 't' பரவல் மாறியின் கூறு அளவை Y-ஆனது

$$Y = \frac{(\bar{X} - \mu_0)\sqrt{(n-1)}}{\sqrt{\frac{1}{n}\Sigma(X_i - \bar{X})^2}}$$

இடைவெளி $(-\infty, \alpha)$-யில் அடங்கியிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு α எனும்படி தீர்வு கட்டமான வெளி $(-\infty, \alpha)$-யை அமைத்து Y-ன் கண்டறிந்த மதிப்பு தீர்வு கட்டமான வெளியில் அடங்கியிருப்பின் சூனிய எடுகோள் மறுக்கத் தக்கதெனவும் அவ்வாறில்லையெனில் அது மறுக்கத் தகாததெனவும் உய்த்துணருகிறோம்.

(iii) $\mu = \mu_0$ எனும் சூனிய எடுகோளுக்கு எதிராக $\mu \neq \mu_0$ எனும் மாற்று எடுகோளை அமைக்கும்போது $\gamma = (n-1)$ கட்டின்மை கொண்ட 't' பரவல் மாறியான கூறு அளவை

$$Y = \left[(\bar{X} - \mu_0)\sqrt{n-1}\right] \Big/ \sqrt{\frac{1}{n}\Sigma(X_i - \bar{X})^2}$$ ஆனது $(-\infty, a)$, (b, ∞) ஆகிய இரு இடைவெளிகள் ஒவ்வொன்றிலும் அடங்கியிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $a/2$ என அமையும்படி எடுத்துக் கொண்டு தீர்வு கட்டமான வெளியை $[(-\infty, a) \cup (b, \infty)]$ அமைத்து Y-ன் கண்டறிந்த மதிப்பு y ஆனது தீர்வு கட்டமான வெளியில் அடங்கியிருப்பின் சூனிய எடுகோள் மறுக்கத்தக்கது எனவும், அவ்வாறில்லையெனில் அது மறுக்கத்தகாதது எனவும் உய்த்துணருகிறோம்.

கணக்கு

ஒரு நிறுவனம் உற்பத்தி செய்யும் மின்னணுக் குழல்களின் சராசரி ஆயுள்காலம் 100 மணிகள் என்போம். குழல்களின் ஆயுள் காலத்தைக் கூடுதலாக்குவதற்கு ஒரு புதிய உற்பத்தி முறையைக் கடைப்பிடிக்க விரும்பும் அந் நிறுவனம் புதிய முறையில் உற்பத்தி செய்த 5 குழல்களின் ஆயுள்கால விவரங்களைச் சேகரித்துக் கீழ்க்கண்ட கூறு அளவைகளை

கூறு சராசரி 108.20 மணிகள்
கூறு திட்ட விலக்கம் 6.43 மணிகள்

பெற்றுள்ளதெனில் புதிய முறை, பழைய முறையைவிடச் சிறந்தது என 5 சதவீத மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்க. மின்னணுக் குழல்களின் ஆயுள் காலத்தைக் குறிக்கும் மாறி ஓர் இயல்நிலை மாறி எனக் கொள்க.

முறை

புதிய உற்பத்தி முறையானது பழைய உற்பத்தி முறையை விடச் சிறந்தது என ஆயவேண்டியிருப்பதால், புதிய முறையானது பழைய முறையைவிடச் சிறந்ததல்ல எனும் சூனிய எடுகோளையும் அதற்கு எதிராகப் புதிய முறையானது பழைய முறையைவிடச் சிறந்தது எனும் மாற்று எடுகோளையும் அமைத்துக்கொள்வோம்.

அப்போது,

சூனிய எடுகோளின் கீழ் : $\mu = 100$ ஆகவும்
மாற்று எடுகோளின் கீழ் : $\mu > 100$ ஆகவும்

அமைகிறது.

கூறு சராசரி $\bar{x} = 108{\cdot}20$
கூறு திட்ட விலக்கம் $s = 6{\cdot}43$
கூறு உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை $n = 5$

ஆகிய கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்புகளைக் கொண்டு கூறு அளவை Y-ன்

$$Y = \frac{(X - \mu)\sqrt{n-1}}{s}$$

$$= \frac{(108{\cdot}20 - 100{\cdot}00)\sqrt{4}}{6{\cdot}43}$$

$$= 2{\cdot}25$$

மதிப்பைக் கணக்கிடுகிறோம்.

சூனிய எடுகோளின் கீழ் ராண்டம் மாறி Y-ன் பரவல், $n - 1 = 4$ கட்டின்மை கொண்ட t-பரவலாக அமைவதால், மெய்யெண் C

$$P_r (Y > C) = 0.05$$

எனும் நிபந்தனைக்கு உட்படுகிறதெனில், அதன் மதிப்பு $C = 2.132$ என t-அட்டவணையிலிருந்து பெறுகிறோம்.

சோதனைக்கு ஏற்றதான தீர்வு கட்டமான வெளி

$$\{y : C \leq y < \infty\} = \{y : 2.132 \leq y < \infty\}$$

ஆகும்.

இப்போது, கூறு அளவை Y-ன் கண்டறிந்த மதிப்பு 2.55 ஆனது தீர்வு கட்டமான வெளியில் அடங்கியிருப்பதால் $\mu = 100$ எனும் சூனிய எடுகோள் மறுக்கத்தக்கது என உய்த்துணருகிறோம். ஆகவே கொடுக்கப்பட்ட கூறு விவரங்களின் வாயிலாகப் புதிய உற்பத்தி முறையானது பழைய உற்பத்தி முறையைவிட மின்னணுக் குழல்களின் சராசரி ஆயுள் காலத்தை 100 மணிக்குக் கூடுதலாக அமையச் செய்கிறது என 5 சதவீத மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் உய்த்துணர்வு முடிவு பெறுகிறோம்.

கணக்கு

'500 கிராம்கள் எடையுள்ள சர்க்கரை நிரப்பப்பட்டுள்ளது' எனக் குறிக்கப்பட்டிருக்கும் பைகளின் முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து 10 பைகள் கொண்ட ஒரு கூறு தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டது. அக் கூறின் சராசரி 492 கிராம்கள், திட்ட விலக்கம் 21 கிராம்கள் எனில், 'முழுமைத் தொகுதியில் இடம் பெறும் பைகளில் நிரப்பப் பட்டுள்ள சர்க்கரையின் சராசரி எடை 500 கிராம்களுக்குக் குறைவாக உள்ளது' என முடிவு கொள்வது சரியா என்பதை 10% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் ஆய்வு செய்க. பைகளில் நிரப்பப் பட்டுள்ள சர்க்கரையின் எடையைக் குறிக்கும் மாறி ஓர் இயல்நிலை மாறி எனக் கொள்க.

முறை

முழுமைத் தொகுதியில் இடம் பெறும் பைகளில் நிரப்பப் பட்டுள்ள சர்க்கரையின் எடை 500 கிராம்களுக்குக் குறைவாக உள்ளதா என ஆய வேண்டியிருப்பதால், 'பைகளின் சராசரி எடை 500 கிராம்கள்' எனும் சூனிய எடுகோளையும், அதற்கு எதிராக 'பைகளின் சராசரி எடை 500 கிராம்களுக்குக் குறைவு' எனும் மாற்று எடுகோளையும் அமைத்துக் கொள்வோம்.

அப்போது

சூனிய எடுகோளின் கீழ் : $\mu = 500$ ஆகவும்
மாற்று எடுகோளின் கீழ் : $\mu < 500$ ஆகவும்

அமைகிறது.

கூறு சராசரி $\bar{x} = 492$
கூறு திட்ட விலக்கம் $s = 21$
கூறு உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை $n = 10$

ஆகிய மதிப்புகளைக் கொண்டு கூறு அளவை Y-ன்

$$Y = \frac{(\bar{x}-\mu)\sqrt{n-1}}{s}$$

$$= \frac{(492-500)\sqrt{9}}{21}$$

$$= -1{\cdot}14$$

மதிப்பைப் பெறுகிறோம்.

ராண்டம் மாறி Y-ன் பரவல் $n-1 = 9$ கட்டின்மை கொண்ட t-பரவலாக அமையும்போது, மெய்யெண் d

$$P_t\,(y < d) = 0{\cdot}10$$

எனும் நிபந்தனைக்கு உட்படுகிறதெனில், அதன் மதிப்பு $d = -1{\cdot}383$ என t-அட்டவணையிலிருந்து பெறுகிறோம். எனவே, சோதனைக்கு ஏற்றதான தீர்வு கட்டமான வெளி

$$\{y : -\infty < y < d\} = \{y : -\infty < y < -1{\cdot}383\}$$

ஆகும்.

இப்போது கூறு அளவை Y-ன் கண்டறிந்த மதிப்பு $-1{\cdot}14$ ஆனது தீர்வு கட்டமான வெளிக்குப் புறத்தே அமைவதால் சூனிய எடுகோள் மறுக்கத்தகாதது என உய்த்துணருகிறோம். ஆகவே, கொடுக்கப்பட்ட கூறு விவரங்கள் வாயிலாக 'முழுமைத் தொகுதியில் இடம் பெறும் பைகளில் நிரப்பப்பட்டுள்ள சர்க்கரையின் சராசரி எடை 500 கிராம்களுக்குக் குறைவாக உள்ளது' என முடிவு கொள்வது சரியல்ல என்பதை 10% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் உய்த்துணருகிறோம்.

கணக்கு

ஒரு குவியலிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட 17 எஃகு கம்பி களின் விறைப்பு வலிமை (tensile strength) விவரங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

கூறு சராசரி = 17910 *psi*
கூறு திட்ட விலக்கம் = 776 *psi*

இவைகள் வாயிலாகக் குவியலிலுள்ள கம்பிகளின் சராசரி விறைப்பு வலிமை 17000 *psi* எனக் கொள்ளலாமா என்பதை 5% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்க. எஃகு கம்பிகளின் விறைப்பு வலிமை மாறி ஓர் இயல்நிலை மாறி எனக் கொள்க.

முறை

குவியலிலுள்ள கம்பிகளின் சராசரி விறைப்பு வலிமை $\mu = 17000$ *psi* என சூனிய எடுகோடுகளையும் இதற்கு எதிராக $\mu \neq 17000$ *psi* என மாற்று எடுகோளையும் அமைத்துக் கொள் வோம்.

கூறு சராசரி $\bar{x} = 17910$
கூறு திட்ட விலக்கம் $s = 776$
கூறுகளின் எண்ணிக்கை $n = 17$

ஆகிய கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்புகளைக் கொண்டு, கூறு அளவை Y-ன்

$$Y = \frac{(\bar{x} - \mu)\sqrt{n-1}}{s}$$

$$= \frac{(17910 - 17000)\sqrt{16}}{776}$$

$$= 4{\cdot}17$$

மதிப்பைப் பெறுகிறோம்.

ராண்டம் மாறி Y-ன் பரவல் $n - 1 = 16$ கட்டின்மை கொண்ட *t* பரவலாக அமையும் போது, *a*, *b* ஆகிய மெய்யெண்கள்

$$P_r\,(y < a) = P_r\,(y > b) = \frac{0{\cdot}01}{2}$$

எனும் நிபந்தனைகளுக்கு உட்படுகிறதெனில் அவைகளின் மதிப்பு கள் $a = -2{\cdot}921$, $b = 2{\cdot}921$ என *t* அட்டவணையிலிருந்து பெறுகிறோம்.

எனவே, சோதனைக்கு ஏற்றதான தீர்வுகட்டமான வெளி

$$w = \{ y : -\infty < y \leq a \} \cup \{ b \leq y \leq \infty \}$$
$$= \{ y : -\infty < y \leq -2.921 \} \cup \{ y : 2.921 \leq y < \infty \}$$

ஆகும்.

இப்போது கூறு அளவை Y-ன் கண்டறிந்த மதிப்பு $+ 4.17$ ஆனது தீர்வுகட்டமான வெளியில் அடங்கியிருப்பதால் சூனிய எடுகோள் மறுக்கத்தக்கது என உய்த்துணருகிறோம். ஆகவே கூறு விவரங்கள் வாயிலாக, குவியலிலுள்ள எஃகு கம்பிகளின் சராசரி விறைப்பு வலிமை 17000 *psi* எனக் கொள்ளலாகாது என 1% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் உய்த்துணருகிறோம்.

இரு சராசரிகளின் சமத்திற்கான சோதனை (Test for the equality of two means)

X, Y ஆகியன முறையே இயல்நிலை $N(\mu_x, \sigma^2)$; $N(\mu_y, \sigma^2)$ மாறிகள் என்போம். மாறிகளின் சராசரிகள் சமமதிப்பை ஏற்குமா அதாவது $\mu_x = \mu_y$ ஆகுமா அல்லது வேறுபட்ட மதிப்புகளை ஏற்குமா என X-மாறியின் சமவாய்ப்புக்கூறு $X_1, X_2, \ldots, X_n$; Y-மாறியின் சமவாய்ப்புக் கூறு $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ ஆகியவைகளைக் கொண்டு $100\,d$ சதவீத மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்வதுபற்றி காண்போம்.

(i) முதலில் $\mu_x = \mu_y$ எனும் சூனிய எடுகோளையும் இதற்கு எதிராக $\mu_x > \mu_y$ எனும் மாற்று எடுகோளையும் அமைப்போம்.

அடுத்து கூறு அளவை V-ஐ

$$V = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\dfrac{n S_x^2 + m S_y^2}{m + n - 2}\left(\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}\right)}}$$

எடுத்துக் கொள்வோம். இங்கு $\bar{X} = \frac{1}{n} \Sigma X_i$; $\bar{Y} = \frac{1}{m} \Sigma Y_i$;

$$S_x^2 = \frac{1}{n} \Sigma (X_i - \bar{X})^2 \quad ; \quad S_y^2 = \frac{1}{m} \Sigma (Y_i - \bar{Y})^2$$

ஆகின்றன. சூனிய எடுகோள் உண்மையாயின் V-மாறியானது $\nu = (m + n - 2)$ கட்டின்மை கொண்ட 't' மாறியாகும்.

மாற்று எடுகோள் $\mu_x > \mu_y$ என்பதால் தீர்வுகட்டமானவெளி $w = \{ v : c \leq v < \infty \}$-யை

$$P_r(V \in W) = (C < V < \infty) = \int_C^{\infty} f_v(v)\, dv = \alpha$$

நிபந்தனைக்குட்படும்படி பெறுகிறோம். இங்கு $f_v(v)$ ஆனது V-மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவலாகும்.

கூறுமாறிகளின் கண்டறிந்த மதிப்புகளைக் கொண்டு

$$v = \frac{(\bar{x} - \bar{y})}{\sqrt{\frac{n\, s_x^2 + m\, s_y^2}{(m+n-2)} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}}$$

v-யின் மதிப்பைக் கணக்கிட்டு அது தீர்வுகட்டமான வெளியில் அடங்கியிருப்பின் சூனிய எடுகோள் மறுக்கத் தக்கது எனவும், அவ்வாறில்லையெனில் சூனிய எடுகோள் மறுக்கத் தகாதது எனவும் உய்த்துணருகிறோம்.

(ii) $\mu_x = \mu_y$ எனும் சூனிய எடுகோளுக்கு எதிராக $\mu_x < \mu_y$ எனும் மாற்று எடுகோளை அமைக்கும்போது (i)-யில் எடுத்துக் கொண்ட $\nu = (m+n-2)$ கட்டின்மை கொண்ட 't'-பரவல் மாறியான கூறு அளவை V–ஆனது இடைவெளி $(-\infty, d)$-யில் அடங்கியிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு α எனும்படி தீர்வுகட்டமான இடைவெளி $(-\infty, d)$–யை அமைத்து V-யின் கண்டறிந்த மதிப்பு v–ஆனது d-க்குக் குறைவெனில் சூனிய எடுகோள் மறுக்கத்தக்கது எனவும், அவ்வாறில்லையெனில் சூனிய எடுகோள் மறுக்கத்தகாதது எனவும் உய்த்துணருகிறோம்.

(iii) $\mu_x = \mu_y$ எனும் சூனிய எடுகோளுக்கு எதிராக $\mu_x \neq \mu_y$ எனும் மாற்று எடுகோளை அமைக்கும்போது (i)–யில் எடுத்துக் கொண்ட $\nu = (m + n - 2)$ கட்டின்மை கொண்ட t-பரவல் மாறியான கூறுஅளவை V-ஆனது $(-\infty, a)$; (b, ∞) ஆகிய இரு இடைவெளிகள் ஒவ்வொன்றிலும் அடங்கியிருப்பதற்கான நிகழ் தகவு $d/2$ என அமையும்படி எடுத்துக்கொண்டு, தீர்வுகட்டமான வெளியை $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$-ப் பெறுகிறோம். V-யின் கண்டறிந்த மதிப்பு v-ஆனது தீர்வு கட்டமான வெளியில் அடங்கியிருப்பின் சூனிய எடுகோள் மறுக்கத்தக்கது எனவும், அவ்வாறில்லையெனில் அது மறுக்கத்தகாதது எனவும் உய்த்துணருகிறோம்.

இப்போது X, Y ஆகிய இருமாறி இயல்நிலைப் பரவலிலிருந்து சோடியான கூறுமாறிகள் $(X_1, Y_1); (X_2, Y_2); (X_3, Y_3); \ldots\ldots; (X_n, Y_n)$ பெற்றுள்ளதாகக் கொள்வோம். இவைகள் வாயிலாக X, Y

மாறிகளின் சராசரி μ_x, μ_y ஆகியவைகள் சமமதிப்புடையனவா, அதாவது $\mu_x = \mu_y$ ஆகுமா, அல்லது வேறுபட்ட மதிப்புகளைக் கொண்டுள்ளனவா எனச் சோதனை செய்வது பற்றிக் காண்போம்.

முதலில் $\mu_x = \mu_y$ எனும் சூனிய எடுகோளை அமைப்போம். சோடிமாறிகளான (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), ..., (X_n, Y_n) ஆகியவைகளைக் கொண்டு $D_i = (X_i - y_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ எனும் புதிய மாறிகளை அமைப்போம். சூனிய எடுகோள் உண்மையாயிருப்பின் $D_1, D_2, \ldots, D_n$ ஆகிய மாறிகள் இயல்நிலை $N(0, \sigma^2)$ பரவலிலிருந்து பெற்ற சமவாய்ப்புக் கூறு மாறிகளாகின்றன.

இப்போது $D_1, D_2, \ldots\ldots, D_n$ மாறிகளின் சராசரி, மாறுபாடு ஆகியவைகளை முறையே

$$\bar{D} = \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} D_i$$

$$S_D^2 = \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} (D_i - \bar{D})^2$$ எனக் குறிப்பிடுவோம்.

இப்போது கூறு அளவை V-ஐ

$$V = \frac{\bar{D}\sqrt{n-1}}{S_D}$$ எடுத்துக் கொள்வோம்.

சூனிய எடுகோள் உண்மையாயிருப்பின் V-மாறியானது $(n-1)$ கட்டின்மை கொண்ட t-மாறியாகும்.

மாற்று எடுகோள் (i) $\mu_x > \mu_y$; (ii) $\mu_x < \mu_y$; (iii) $\mu_x \neq \mu_y$ என அமைக்கும்போது முறையே (i) (C, ∞); (ii) $(-\infty, d)$; (iii) $[(-\infty, a) \cup (C, \infty)]$ ஆகிய தீர்வு கட்டமான வெளிகளைக் கீழ்க்காணும் நிபந்தனைக்குட்படும்படி

$$P_r[C < V < \infty] = \int_{C}^{\infty} f_v(x)\,dx = \alpha$$

$$P_r[-\infty < V < d] = \int_{-\infty}^{d} f_v(x)\,dx = \alpha$$

$$P_r[-\infty < V < a] = \int_{-\infty}^{a} f_v(x)\,dx = \alpha/2$$

$$P_r[b < V < \infty] = \int_{b}^{\infty} f_v(x)\,dx = \alpha/2$$

அமைக்கிறோம். இங்கு $f_v(x)$ ஆனது V-மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவலாகும்.

சோடி மாறிகளின் கண்டறிந்த மதிப்புகள் (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n) எனில்,

$$d_i = (x_i - y_i),\ i = 1, 2, \ldots\ldots, n$$

ஆகியவைகளைப் பெற்று அவைகள் வாயிலாக

$$\bar{d} = \frac{1}{n} \Sigma\, d_i \quad ; \quad s_d = \sqrt{\frac{1}{n} \Sigma\, (d_i - \bar{d})^2}$$

ஆகியவற்றைக் கணக்கிட்டு V-யின் கண்டறிந்த மதிப்பு ν-ஐ

$$\nu = \frac{\bar{d}\sqrt{n-1}}{s_d}$$

பெறுகிறோம்.

ν-யின் மதிப்பு தீர்வுகட்டமான வெளியில் அடங்கியிருப்பின் சூனிய எடுகோள் மறுக்கத்தக்க தெனவும், அவ்வாறில்லையெனில் அது மறுக்கத்தகாத தெனவும் உய்த்துணருகிறோம்.

கணக்கு

உளவியல் சோதனை ஒன்றை நடத்தும் பொருட்டு ஒரு பள்ளியைச் சார்ந்த சிறுவர், சிறுமியர் முழுமைத்தொகுதி களிலிருந்து, சம வாய்ப்பு முறையில் 8 சிறுவர்களையும், 10 சிறுமி யர்களையும் கொண்ட இரு கூறுகள் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டன. சோதனையில் பெற்ற மதிப்பெண்களின் சராசரி, திட்டவிலக்கம் ஆகியவைகள் பின் வருமாறு:

	சிறுவர்	சிறுமியர்
கூறு சராசரி	32	36
கூறு திட்ட விலக்கம்	6	4

இவ்விவரங்கள் வாயிலாக, உளவியல் சோதனை மதிப்பெண்களைப் பொருத்த சிறுவர், சிறுமியர் முழுமைத் தொகுதிகளின் சராசரிகள் சமமானவைகளா என 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்க. உளவியல் சோதனையில் பெறும் மதிப்பெண் மாறியானது ஓர் இயல்நிலை மாறி எனக் கொள்க.

முறை

உளவியல் சோதனை மதிப்பெண்களைப் பொருத்து சிறுவர், சிறுமியர் முழுமைத் தொகுதிகளின் சராசரிகள் சமமானவை எனும் சூனிய எடுகோளையும், இதற்கு எதிராக அவைகள் சமமில்லாதவை எனும் மாற்று எடுகோளையும் அமைத்துக் கொள்வோம்.

சிறுவர் முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பெற்ற கூறு உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை, கூறு மதிப்பெண்களின் சராசரி, திட்ட விலக்கம் ஆகியவைகள் முறையே n, $\bar{X}$, S_x எனக் குறிப்பிடும்போது அவைகளின் கண்டறிந்த மதிப்புகள் முறையே 8, 32, 6 ஆக அமைகின்றன. சிறுமியர் முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பெற்ற கூறு உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை, கூறு மதிப்பெண்களின் சராசரி, திட்ட விலக்கம் ஆகியவைகளை முறையே n, $\bar{Y}$, S_y எனக் குறிப்பிடும் போது அவைகளின் கண்டறிந்த மதிப்புகள் முறையே 8, 36, 4 ஆக அமைகின்றன.

இப்போது கூறு அளவை V-ன்

$$V = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\dfrac{n S_x^2 + m S_y^2}{n + m - 2}\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m}\right)}}$$

$$= \frac{32 - 36}{\sqrt{\dfrac{8 \times 36 + 10 \times 16}{8 + 10 - 2}\left(\dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{10}\right)}}$$

$$= -1{\cdot}60$$

மதிப்பைப் பெறுகிறோம்.

ராண்டம் மாறி V-ன் பரவல் $n+m-2 = 16$ கட்டின்மை கொண்ட t-பரவலாக அமையும்போது, a, b ஆகிய மெய்யெண்கள்

$$P_r = (V < a) = (V > b) = \frac{0{\cdot}05}{2}$$

எனும் நிபந்தனைகளுக்கு உட்படுகிறதெனில் அவைகளின் மதிப்புகள் $a = 2{\cdot}120$, $b = 2{\cdot}120$ என t-அட்டவணையிலிருந்து பெறுகிறோம்.

எனவே, சோதனைக்கு ஏற்றதான தீர்வுகட்டமான வெளி

$$\omega = \{y : -\infty < y \leq a\} \cup \{y : b \leq y < \infty\}$$
$$= \{y : -\infty < y \leq -2{\cdot}120\} \cup \{y : 2{\cdot}120 \leq y < \infty\}$$

ஆகும்.

இப்போது கூறு அளவை Y-ன் மதிப்பு $-1{\cdot}60$ ஆனது தீர்வு கட்டமான வெளிக்குப் புறத்தே அமைவதால் சூனிய எடுகோள் மறுக்கத் தகாதது என உய்த்துணருகிறோம். ஆகவே, கூறு விவரங்கள் வாயிலாக, உளவியல் சோதனை மதிப்பெண்களைப் பொருத்து சிறுவர், சிறுமியர் முழுமைத் தொகுதிகளின் சராசரிகள் சமமானவைகள் என 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் உய்த்துணருகிறோம்.

கணக்கு

பேருந்து ஓட்டுநரின் திறமையைக் கூடுதலாக்கும் பொருட்டு ஒரு பயிற்சி அளிக்கப்படுகிறது என்போம். எவ்வகையிலும் வேறுபாடில்லாத 8 ஓட்டுநர்களுக்குப் பயிற்சி அளிக்கப்படுகிறது எனவும், பயிற்சிக்கு முன்பும், பயிற்சிக்குப் பின்பும் அவர்கள் திறமையைக் குறிப்பிடும் மதிப்பெண்கள் பின்வருமாறு எனவும் கொள்வோம்.

	ஓட்டுநர்	1	2	3	4	5	6	7	8
மதிப்பெண்கள்	பயிற்சிக்கு முன்பு	72	79	93	91	70	95	82	74
	பயிற்சிக்குப்பின்பு	86	82	92	87	83	102	87	84

இவ்விவரங்கள் வாயிலாக ஓட்டுநர்களுக்கு அளிக்கப்படும் பயிற்சி அவர்கள் திறமையைக் கூடுதலாக்குகிறதா என்பதை 5% சதவீத மிகைத் தன்மையில் ஆய்வு செய்க. ஓட்டுநர் திறமையைக் குறிக்கும் மதிப்பெண் மாறி ஓர் இயல்நிலை மாறி எனக் கொள்க.

முறை

ஓட்டுநர்களுக்கு அளிக்கப்படும் பயிற்சி அவர்களின் சராசரி திறமையைக் கூடுதலாக்கவில்லை. அதாவது, பயிற்சிக்கு முன்பும், பயிற்சிக்குப் பின்பும் அவர்களின் சராசரி திறமை சமமாக அமைகிறது எனும் சூனிய எடுகோளையும் அதற்கு எதிராகப் பயிற்சிக்குப் பின்பு அவர்களின் சராசரி திறமை பயிற்சிக்கு முன்புள்ள சராசரி திறமையைவிடக் கூடுதலாக அமைகிறது எனும் மாற்று எடுகோளையும் அமைத்துக் கொள்வோம்.

இப்போது பயிற்சிக்கு முன்பும், பயிற்சிக்குப் பின்பும் i ஆவது ஓட்டுநரின் திறமையைக் குறிக்கும் சோடி மதிப்புகளை (X_i, Y_i), $i = 1, 2, \ldots\ldots, 8$ எனக் குறிப்பிடுவோம்.

அப்போது $D_i = (Y_i - X_i)$, $i = 1, 2, \ldots, 8$ மதிப்புகள்

ஓட்டுநர்	$Y_i - X_i =$	D_i
1	86 − 72 =	14
2	82 − 79 =	3
3	92 − 93 =	− 1
4	87 − 91 =	− 4
5	83 − 70 =	13
6	102 − 95 =	7
7	87 − 82 =	5
8	84 − 74 =	10

ஆகின்றன. D-மாறிகளின் சராசரி, திட்ட விலக்கம் ஆகியவை களின் மதிப்புகள் முறையே

$$\bar{D} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} D_i = \frac{47}{8} = 5{\cdot}875$$

$$S_D = \sqrt{\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8}(D_i - \bar{D})^2} = 6{\cdot}307$$

ஆகப் பெறுகிறோம். இவைகளைக் கொண்டு கூறுஅளவை V-ன் மதிப்பைப் பெறுகிறோம்.

$$V = \frac{\bar{D}\sqrt{n-1}}{S_D}$$

$$= \frac{5{\cdot}875\sqrt{7}}{6{\cdot}307}$$

$$= 2{\cdot}463$$

ராண்டம் மாறி V-ன் பரவல் $n-1=7$ கட்டின்மை கொண்ட t-பரவலாக அமையும்போது, மெய்யெண் C

$$P_r\,(V > C) = 0{\cdot}05$$

எனும் நிபந்தனைக்கு உட்படுகிறதெனில் அதன் மதிப்பு

$$C = 1{\cdot}895$$

என t-அட்டவணையிலிருந்து பெறுகிறோம். எனவே, சோதனைக்கு

ஏற்றதான தீர்வு கட்டமான வெளி

$$\omega = \{y : c \leq y < \infty\} = \{y : 1{\cdot}895 \leq y < \infty\}$$

ஆகும்.

இப்போது கூறு அளவை V-ன் மதிப்பு 2·463 ஆனது தீர்வு கட்டமான வெளியில் அடங்கியிருப்பதால் சூனிய எடுகோள் மறுக்கத்தக்கது என உய்த்துணருகிறோம். ஆகவே, கூறு விவரங்கள் வாயிலாக, ஓட்டுநர்களுக்கு அளிக்கப்படும் பயிற்சி அவர்கள் திறமையைக் கூடுதலாக்குகிறது என 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் உய்த்துணர்வு முடிவு செய்கிறோம்.

F–பரவல்
(F–Distribution)

தேற்றம் 1

$X_1, X_2, \ldots, X_n;\ Y_1, Y_2, \ldots\ldots, Y_n$ ஆகியன $(m+n)$ சார்பற்ற, முழுதொத்த இயல்நிலை $N(0, \sigma^2)$ மாறிகள் என்போம்.

இப்போது, U மாறியின்

$$U = \frac{\frac{1}{m}\sum_{1}^{m} X_i^2}{\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} Y_j^2}$$

நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்

$$g_u(u) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right) m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}} u^{\frac{m}{2}-1}}{(n + m u)^{\frac{m+n}{2}}}, \qquad 0 < u < \infty$$

$$= 0, \qquad \text{மற்றபடி}$$

ஆகும்.

தெரிப்பு

$X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ ஆகியன m சார்பற்ற இயல்நிலை $N\ (0, \sigma^2)$ மாறிகளாதலால் V மாறியின்

$$V = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} X_i^2$$

நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்

$$f_V(x) = \frac{m^{\frac{m}{2}}}{2^{\frac{m}{2}} \sigma^m \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} e^{-\frac{mx}{2\sigma^2}} x^{\frac{m}{2}-1}, \quad 0 < x < \infty$$

$$= 0, \quad \text{மற்றபடி}$$

ஆகும்.

$Y_1, Y_2, \ldots\ldots, Y_n$ ஆகியன n சார்பற்ற இயல்நிலை $N\ (0, \sigma^2)$ மாறிகளாதலால், W மாறியின்

$$W = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} Y_j^2$$

நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்

$$f_W(y) = \frac{n^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \sigma^n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{ny}{2\sigma^2}} y^{\frac{n}{2}-1}, \quad 0 < y < \infty$$

$$= 0, \quad \text{மற்றபடி}$$

ஆகும்.

$X_1, X_2, \ldots, X_m$; $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ ஆகியன சார்பற்றதால், V, W ஆகிய மாறிகள் சார்பற்றனவாகின்றன. எனவே, V, W ஆகிய மாறிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்,

$$f_{vw}(x, y) = f_v(x) f_w(y)$$

$$= \frac{m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{m+n}{2}} \sigma^{m+n} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(mx+ny)}$$

$$x^{\frac{m}{2}-1} y^{\frac{n}{2}-1}, \quad \begin{array}{l} 0 < x < \infty \\ 0 < y < \infty \end{array}$$

$$= 0, \qquad \text{மற்றபடி}$$

ஆகும்.

இப்போது, $U = \frac{V}{W}$, $Z = W$ ஆகிய மாறிகளை எடுத்துக்கொள்வோம்.

V, W ஆகிய மாறிகளின் வெளி

$$A = \{ (x, y) : 0 < x < \infty, \ 0 < y < \infty \}$$

ஆவதால்,

U, Z ஆகிய மாறிகளின் வெளி

$B = \{ (u, z) : 0 < u < \infty, \ 0 < z < \infty \}$ ஆகிறது.

$u = \frac{x}{y}$, $z = y$ ஆகிய சார்புகள் A, B ஆகிய இரு கணப் பகுதிகளின் ஒன்றுக்கொன்றான உருமாற்றமாகும். எனவே, இந்த உருமாற்றத்திற்கு எதிர்மாறான உருமாற்றம்

$$x = uz, \quad y = z$$

ஆகும்.

மேலும் உருமாற்றத்தின் ஜாக்கோபியன்

$$J = \begin{vmatrix} z & u \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = z$$

ஆகும்.

U, Z ஆகிய மாறிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவுப் பரவல்

$$f_{uz}(u, z) = f_{vw}(uz, z) \; |J|$$

$$= \frac{m^{\frac{m}{2}} \, n^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{m+n}{2}} \, \sigma^{m+n} \, \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(mu+n)z} \, u^{\frac{m}{2}-1} \, z^{\frac{m+n}{2}-1}$$

$$0 < u < \infty$$
$$0 < z < \infty$$

$= 0$, மற்றபடி

ஆகும்.

U மாறியின் இறுதிநிலை அடர்த்திப் பரவல்

$$g_u(u) = \int_0^\infty f_{uz}(u, z) \, dz$$

$$= \frac{m^{\frac{m}{2}} \, n^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{m+n}{2}} \, \sigma^{m+n} \, \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \, u^{\frac{m}{2}-1} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(mu+n)z} \, z^{\frac{m+n}{2}-1} \, dz$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right) m^{\frac{m}{2}} \, n^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \; \frac{u^{\frac{m}{2}-1}}{(n+mu)^{\frac{m+n}{2}}},$$

$$0 < u < \infty$$

$= 0$, மற்றபடி

ஆகும்.

இந்த நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவலை, (m, n) கட்டின்மைகள் கொண்ட F-பரவல் என அழைக்கிறோம்.

$X_1, X_2, \ldots, X_m, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ ஆகிய மாறிகளின் சுட்டுறுப்பு σ^2-ஆக அமைந்திருப்பினும், அவைகளின் சார்பான U மாறியின்.

$$U = \frac{\frac{1}{m} \sum_{1}^{m} X_i^2}{\frac{1}{n} \sum_{1}^{n} Y_i^2}$$

நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவலானது சுட்டுறுப்பு σ^2-ஐச் சாரா திருப்பது இப் பரவலின் ஒரு சிறப்புப் பண்பாகும்.

வரையறை

F-ராண்டம் மாறி

$X_1, X_2, \ldots, X_m$ ஆகியன m சார்பற்ற முழுதொத்த இயல்நிலை $N(0, \sigma^2)$ மாறிகளெனில்,

V' மாறியானது

$$V' = \sum_{i=1}^{m} \frac{X_i^2}{\sigma^2}$$

m கட்டின்மை கொண்ட கைவர்க்க மாறியாகும்.

$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ ஆகியன n சார்பற்ற, முழுதொத்த இயல்நிலை $N(0, \sigma^2)$ மாறிகளெனில், W' மாறியானது

$$W' = \sum_{j=1}^{n} \frac{Y_j^2}{\sigma^2}$$

n கட்டின்மை கொண்ட கைவர்க்க மாறியாகும்.

இப்போது,

$$\frac{V'/m}{W'/n} = \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} x_i^2}{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} y_j^2} = U$$

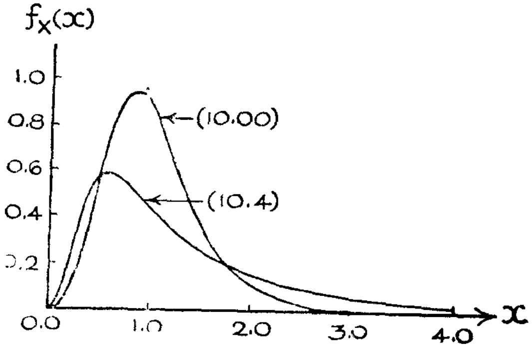
ஆகும்.

U மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவலை F-பரவல் எனக் குறிப்பிடுவதால் F ராண்டம் மாறியைக் கீழ்க்கண்டவாறு வரையறை செய்கிறோம்.

ξ மாறியானது V_1 கட்டின்மை கொண்ட கைவர்க்க மாறியாகவும், η மாறியானது V_2 கட்டின்மை கொண்ட கைவர்க்க மாறியாகவும், இவ்விரு மாறிகளும் சார்பற்றனவாகவும் அமையுமெனில், U மாறியை

$$U = \frac{\xi / \gamma_1}{\eta / \gamma_2}$$

(γ_1, γ_2) கட்டின்மைகள் கொண்ட F-ராண்டம் மாறி ஆகும்.



படம் 6.3
F அடர்த்திப் பரவல்கள்

F பரவலின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை

(m, n) கட்டின்மைகள் கொண்ட F பரவலின் rஆவது விலக்கப் பெருக்குத் தொகை

$$\mu_r' = \int_0^\infty x^r \; g_F(x) \; dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \; \frac{m^{\frac{m}{2}} \; n^{\frac{n}{2}}}{(n+mx)^{\frac{m+n}{2}}} \; dx$$

$$= \left(\frac{n}{m}\right)^r \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}+r\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-r\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \; r < \frac{n}{2}$$

ஆகும்.

எனவே F-பரவலின் சராசரி,

$$E(F) = \frac{n}{n-2}\ , \quad n > 2 \text{ ஆகும்.}$$

இச் சராசரியானது m-ஐச் சாராதிருப்பதைக் கருத்திற் கொள்ளவேண்டும்.

F-பரவலின் மாறுபாடு,

$$D^2(F) = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}\ , \quad n > 4$$

நிலையெண் K_α-விலிருந்து மிகை முடிவிலி $+\infty$ வரையில். அதாவது இடைவெளி (K_α, ∞)யில், (m, n) கட்டின்மை கொண்ட F மாறியின் மதிப்பானது அமைவதற்கான நிகழ்தகவு

$$P_r(F > K_\alpha) = \int_{K_\alpha}^{\infty} g_F(x)\, dx$$

(m, n) கட்டின்மைகள் கொண்ட F-ராண்டம் மாறி ஏற்றுக் கொள்ளும் மதிப்புகள் நிலையெண் K_α-க்குக் கூடுதலாக, அதாவது F மாறியின் மதிப்புகள் இடைவெளி (K_α, ∞)யின் அமைவதற்கான நிகழ்தகவு

$$P_r(F > K_\alpha) = \int_{K_\alpha}^{\infty} g_F(x)\, dx$$

$$= \int_{K_\alpha}^{\infty} \frac{\left|\overline{\frac{m+n}{2}}\right.}{\left|\overline{\frac{m}{n}}\right. \left|\overline{\frac{n}{2}}\right.} \frac{m^{\frac{m}{2}}\, n^{\frac{n}{2}}}{(n+mx)^{\frac{m+n}{2}}}\, x^{\frac{m}{2}-1}\, dx$$

$$= \alpha\ , \qquad 0 < \alpha < 1$$

என்போம்.

நிலையெண் K_α-ஐ (m, n) கட்டின்மைகள் கொண்ட F-பரவலை 100α சதவீதப் புள்ளியென அழைக்கிறோம். $m = 1, 2, 3, \ldots\ldots$; $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$ ஆகிய மதிப்புகளுக்கு இணையான F பரவலின் 100α சதவீதப் புள்ளிகள், அதாவது, K_α மதிப்புகள், பியர்சன்-யேட்ஸ், பையாமெட்ரிகா ஆகிய புள்ளியியல் அட்டவணைப் புத்தகங்களில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

தேற்றம் 2

X மாறியானது (m, n) கட்டின்மைகள் கொண்ட F மாறியெனில், $\frac{1}{X}$ மாறியானது (n, m) கட்டின்மைகள் கொண்ட F மாறியாகும்.

தெரிப்பு

V, W ஆகிய இரு சார்பற்ற கைவாக்க மாறிகளின் கட்டின்மைகள் முறையே m, n எனில் $\frac{(V/m)}{(W/n)}$ மாறியை (m, n) கட்டின்மை கொண்ட F மாறியெனவும், $\frac{(W/n)}{(V/m)}$ மாறியை (n, m) கட்டின்மை கொண்ட F மாறியெனவும் குறிப்பிடுகிறோம். X மாறியானது (m, n) கட்டின்மைகள் கொண்ட F மாறியெனில் $X = \frac{V/m}{W/n}$ எனக் குறிப்போம். இப்போது $\frac{1}{X} = \frac{W/n}{V/m}$ என அமைவதால், $\frac{1}{X}$ மாறியானது (n, m) கட்டின்மை கொண்ட F மாறியாகும்.

தேற்றம் 3

$X_1, X_2, \ldots\ldots, X_m$ ஆகியவைகள் சார்பற்ற முழுதொத்த இயல்நிலை $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ பரவலிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட சமவாய்ப்புக் கூறு எனவும், $Y_1, Y_2, \ldots\ldots, Y_n$ ஆகியவைகள் சார்பற்ற முழுதொத்த இயல்நிலை $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ பரவலிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட சமவாய்ப்புக் கூறு எனவும் கொள்வோம். X, Y கூறுகளின் சராசரிகள், மாறுபாடுகள் ஆகியவைகளை

$$\bar{X} = \frac{1}{m} \sum_1^m X_i \; ; \quad \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_1^n Y_i$$

$$S_1^2 = \frac{1}{m} \sum_1^m (X_i - \bar{X})^2 \; ; \quad S_2^2 = \frac{1}{n} \sum_1^n (Y_i - \bar{Y})^2$$

எனவும், $\nu_1 = (n_1 - 1)$, $\nu_2 = (n_2 - 1)$, $\theta = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$ எனவும் குறிப்போம்.

$$\text{அப்போது} \quad U = \frac{m\, S_1^2/\nu_1}{n\, S_2^2/\nu_2}$$

மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்

$$g_U(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)}{\Gamma\frac{\nu_1}{2}\,\Gamma\frac{\nu_2}{2}}\ \nu_2^{\frac{\nu_2}{2}}\,(\nu_1\theta)^{\frac{\nu_1}{2}}\ \dfrac{x^{\frac{\nu_1}{2}-1}}{(\nu_2+\nu_1\theta x)^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}}, & 0 < x < \infty \\ = 0, & \text{மற்றபடி} \end{cases}$$

ஆகும்.

தெரிப்பு

$X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ ஆகியவைகள் சார்பற்ற, முழுநொத்த இயல்நிலை $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ பரவலிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட சமவாய்ப்புக் கூறு எனில்,

$$\xi = \frac{\sum_1^n (x_i - \bar{X})^2}{\sigma_1^2} = \frac{m\,S_1^2}{\sigma_1^2}$$

மாறியானது $\nu_1 = (m-1)$ கட்டின்மை கொண்ட கைவர்க்க மாறியாகும்.

$Y_1, Y_2, \ldots\ldots, Y_n$ ஆகியவைகள் சார்பற்ற முழுநொத்த இயல்நிலை $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ பரவலிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட சமவாய்ப்புக் கூறு எனில்,

$$\eta = \frac{\sum_1^m (Y_i - Y)^2}{\sigma_2^2} = \frac{m\,S_2^2}{\sigma_2^2}$$ மாறியானது

$\nu_2 = (n-1)$ கட்டின்மை கொண்ட கைவர்க்க மாறியாகும். X மாறிகளும், Y மாறிகளும் சார்பற்றன எனில் ξ, η ஆகிய இரு மாறிக்கும் சார்பற்ற மாறிகளாகின்றன. எனவே,

$W = \dfrac{\xi/\nu_1}{\eta/\nu_2}$ மாறியானது (ν_1, ν_2) கட்டின்மைகள் கொண்ட F மாறியாகும்.

W-ன் நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்

$$g_W(w) = \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)} \nu_1^{\frac{\nu_1}{2}} \nu_2^{\frac{\nu_2}{2}} \frac{w^{\frac{\nu_1}{2}-1}}{(\nu_2+\nu_1 w)^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}} \right\}, \quad 0 < w < \infty$$

$$= 0, \qquad \text{மற்றபடி.}$$

இப்போது,

$$W = \frac{m\, S_1^2/\nu_1\sigma_1^2}{n\, S_2^2/\nu_2\sigma_2^2} = \frac{m\, S_1^2/\nu_1}{n\, S_2^2/\nu_2} \times \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = U\,\theta$$

ஆகும். எனவே, U-மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்,

$$g_U(x) = \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)} (\nu_1\,\theta)^{\frac{\nu_1}{2}} \nu_2^{\frac{\nu_2}{2}} \frac{x^{\frac{\nu_1}{2}-1}}{(\nu_2+\nu_1\,\theta x)^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}} \right\}, \quad 0 < x < \infty$$

$$= 0, \qquad \text{மற்றபடி}$$

ஆகும்.

தேற்றம் 4

X_{ij}, $j = 1, 2, \ldots\ldots, n_i$, $i = 1, 2, \ldots\ldots, k$ ஆகிய $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = N$ மாறிகள் சார்பற்ற முழுதொத்த இயல்நிலை $N(\mu, \sigma^2)$ பரவலிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட சமவாய்ப்புக் கூறு என்போம்.

இப்போது

$$\bar{X}_{i\cdot} = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots\ldots, k.$$

$$\bar{X}_{\cdot\cdot} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} n_i \bar{X}_{i\cdot}$$

$$V_1 = \sum_{i=1}^{k} n_i (\bar{X}_{i\cdot} - \bar{X}_{\cdot\cdot})^2 \; ; \; V_2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_{i\cdot})^2$$

எனில்,

$$U = \frac{V_1/(K-1)}{V_2/(N-K)}$$ மாறியானது $[(K-1), (N-K)]$

கட்டின்மை கொண்ட F மாறியாகும்.

தெரிப்பு

$X_{i1}, X_{i2}, \ldots\ldots, X_{in_i}$ ஆகியவைகள் சார்பற்ற முழுதொத்த இயல்நிலை $N(\mu, \sigma^2)$ பரவலிலிருந்து பெற்ற சமவாய்ப்புக் கூறு என்பதால் $(\bar{X}_{i\cdot} - \mu)\dfrac{\sqrt{n_i}}{\sigma}$ மாறியானது இயல்நிலை $N(0, 1)$ ஆகவும், $\dfrac{1}{\sigma_2} \sum_j (X_{ij} - \bar{X}_{i\cdot})^2$ மாறியானது $(n_i - 1)$ கட்டின்மை கொண்ட கைவர்க்க மாறியாகவும், இவைகள் சார்பற்றனவாக வும் அமைகின்றன.

இப்போது $\xi_i = (X_{i\cdot} - \mu)\dfrac{\sqrt{n_i}}{\sigma}$, $i = 1, 2, \ldots\ldots, k$

ஆகிய K மாறிகள் சார்பற்ற முழுதொத்த இயல்நிலை $N(0, 1)$ மாறிகளாகின்றன.

$$\eta_1 = \frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{N}} \xi_1 + \frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{N}} \xi_2 + \ldots\ldots\ldots + \frac{\sqrt{n_k}}{\sqrt{N}} \xi_k$$

$\eta_r = a_{r1} \xi_1 + a_{r2} \xi_2, + \ldots\ldots + a_{rk} \xi_k, \; r = 2, 3, \ldots, k$ ஆகிய சார்புகளை $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$ - வெளி $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k)$ - வெளி ஆகிய இரு வெளிகளுக்கான செங்குத்தான உருமாற்றம் (Orthogonal Transformation) எனக் கொள்வோம். அப்போது $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$ ஆகிய K மாறிகள் சார்பற்ற முழுதொத்த இயல் நிலை $N(0, 1)$ மாறிகளாக அமைகின்றன.

$$\eta_1 = \sum_{i=1}^{k} \frac{\sqrt{n_i}\,\xi_i}{\sqrt{N}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i n_i (\bar{X}_{i\cdot} - \mu)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} (N\bar{X}.. - N\mu)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} (\bar{X}.. - \mu)$$

$$V_1 = \sum_{i=1}^{k} n_i (\bar{X}_{i.} - \bar{X}..)^2 = \sum_{i} n_i \left[(\bar{X}. - \mu) - (\bar{X}_{i.} - \mu) \right]^2$$

$$= \sum_{i} n_i (X_{i.} - \mu) - N(X.. - \mu)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \xi_i - \eta_1^2$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \eta_i^2 - \eta_1^2$$

$$= \sum_{i=2}^{k} \eta_i^2$$

V_1 மாறியானது $(K-1)$ சார்பற்ற முழுதொத்த இயல்நிலை $N(0, 1)$ மாறிகளின் வர்க்கக் கூடுதலாக அமைவதால் அது $(K-1)$ கட்டின்மை கொண்ட கைவர்க்க மாறியாகும்.

இப்போது $i = 1, 2, \ldots, k$ எனும்போது ஒவ்வொரு $W_i = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^{n_i} (\bar{X}_{ij} - \bar{X}_i .)^2$ மாறியும் $(n_i - 1)$ கட்டின்மை கொண்ட கைவர்க்க மாறியாவதாலும், இவைகள் சார்பற்றன என்பதாலும், $V_2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} (\bar{X}_{ij} - \bar{X}_i .)$ மாறியானது $\sum_{1}^{k} (n_i - 1) = (N-K)$ கட்டின்மை கொண்ட கைவர்க்கப் பரவலாகும். மேலும், V_1, V_2 ஆகிய மாறிகள் சார்பற்றன வாகின்றன. ஆகவே, $U = \frac{V_1/(K-1)}{V_2/(N-K)}$ மாறியானது $[(K-1), (N-K)]$ கட்டின்மைகள் கொண்ட F மாறியாகும்.

F - பரவலின் பயன்முறைகள்

இரு மாறுபாடுகளின் விகிதத்திற்கான நம்பிக்கை இடைவெளி (Confidence interval for the ratio of two variances)

X, Y ஆகிய இரு இயல்நிலை மாறிகளின் மாறுபாடுகள் முறையே σ_1^2, σ_2^2 எனில், அவைகளின் விகிதம் $\theta = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$ -க்கான $(1-\alpha)$ சதவீத நம்பிக்கை இடைவெளியைப் பெறுவது பற்றி காண்போம்.

X பரவலிலிருந்து பெற்ற சமவாய்ப்புக் கூறு மாறிகள் $X_1, X_2, \ldots, X_m$ ஆகியவைகளின் சராசரி மாறுபாடு முறையே $\overline{X} = \frac{1}{m}\sum_1^m X_i$, $S_1^2 = \frac{1}{m}\sum_1^m (X_i - \overline{X})^2$ எனவும், Y பரவலிலிருந்து பெற்ற சமவாய்ப்புக் கூறு மாறிகள் $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ ஆகியவைகளின் சராசரி மாறுபாடு முறையே $\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_1^n Y_i$,

$S_2^2 = \frac{1}{n}\sum_1^n (Y_i - \overline{Y})^2$ எனவும், $\nu_1 = (m-1)$, $\nu_2 = (n-1)$ எனவும் குறிப்போம்.

கூறு அளவை V-ஐ

$$V = \frac{m\, S_1^2/\nu_1\, \sigma_1^2}{n\, S_2^2/\nu_2\, \sigma_2^2}$$ எடுத்துக் கொள்வோம். இதன்

கூறுபரவல் (ν_1, ν_2) கட்டின்மைகள் கொண்ட F பரவலாகும். $C_1 < C_2$ என அமையும் C_1, C_2 ஆகிய இரு மெய்யெண்களை

$$P_r\,(C_1 < v < C_2) = \int_{C_1}^{C_2} g_v(v)\, dv = 1-\alpha$$

நிபந்தனைக்குட்படும்படி எடுத்துக்கொள்வோம். இங்கு $g_v(v)$ ஆனது V மாறியின் பரவலாகும்.

$$P_r(C_1 < v < C_2) = P_r\left\{C_1 < \frac{m\,S_1^2/v_1}{n\,S_2^2/v_2}\ \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} < C_2\right\}$$

$$= P_r\left\{C_1\ \frac{n\,S_2^2/v_2}{m\,S_1^2/v_1} < \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} < C_2\ \frac{n\,S_2^2/v_2}{m\,S_1^2/v_1}\right\}$$

$C_1\,\dfrac{n\,S_2^2/v_2}{m\,S_1^2/v_1}$, $C_2\,\dfrac{n\,S_2^2/v_2}{m\,S_1^2/v_1}$ ஆகிய கூறு சார்புகளைக் கொண்டு பெறும் இடைவெளி $\left[C_1\,\dfrac{n\,S_2^2/v_2}{m\,S_1^2/v_1},\ C_2\,\dfrac{n\,S_2^2/v_2}{m\,S_1^2/v_1}\right]$ ஆனது மாறுபாடுகளின் விகிதம் $\dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$-க்கான $(1-\alpha)$ சதவீத ராண்டம் இடைவெளியாகும் என்கிறோம்.

கூறு மாறிகளின் கண்டறிந்த மதிப்புகள் $x_1, x_2, \ldots, x_m$, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ஆகியவைகளைக் கொண்டு a_1, a_2 மெய்யெண்களை $a_1 = C_1\,\dfrac{n\,s_2^2/v_2}{m\,s_1^2/v_1}$, $a_2 = C_2\,\dfrac{n\,s_2^2/v_2}{m\,s_1^2/v_1}$ பெற்று, இடைவெளி (a_1, a_2)யை மாறுபாடுகளின் விகிதம் $\dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$-க்கான $(1-\alpha)$ சதவீத நம்பிக்கை இடைவெளி என்கிறோம். பொதுவாக, C_1, C_2 ஆகியவைகளை $P_r(V > C_2) = P_r(V < C_1) = \dfrac{\alpha}{2}$ நிபந்தனைக்குட்படும் படி எடுத்துக்கொள்கிறோம்.

இரு மாறுபாடுகளின் சமத்திற்கான சோதனை (Test for the equality of two variances)

X, Y ஆகிய இரு இயல்நிலை மாறிகளின் மாறுபாடுகள் முறையே σ_1^2, σ_2^2 எனில், இம்மாறுபாடுகள் சமமதிப்பை ஏற்குமா அதாவது $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ஆகுமா அல்லது வேறுபட்ட மதிப்புகளை ஏற்குமா என X-ன் சமவாய்ப்புக் கூறுமாறிகள் $X_1, X_2, \ldots, X_m$, Y-ன் சமவாய்ப்புக் கூறுமாறிகள் $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ ஆகியவைகளைக் கொண்டு α சதவீத மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனை பற்றிக் காண்போம்.

(i) முதலில் $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ எனும் சூனிய எடுகோளையும் இதற்கு எதிராக $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ எனும் மாற்று எடுகோளையும் அமைப்போம்.

அடுத்து கூறு அளவை $V = \dfrac{m\,S_1^2/v_1}{n\,S_2^2/v_2}$ எடுத்துக்கொள்வோம்.

இங்கு

$$\bar{X} = \frac{1}{m} \sum_1^m X_i \quad ; \; \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_1^n Y_i$$

$$S_1^2 = \frac{1}{m} \sum_1^m (X_i - \bar{X})^2 \; ; \; S_2^2 = \frac{1}{n} \sum_1^n (Y_i - \bar{Y})^2$$

$v_1 = (m-1)$, $v_2 = (n-1)$ ஆகின்றன.

சூனிய எடுகோள் உண்மையாயின், V மாறியானது (v_1, v_2) கட்டின்மைகள் கொண்ட F மாறியாகும். மாற்று எடுகோள் $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ என்பதால், தீர்வு கட்டமான வெளி (C, ∞)யை

$$P_r\,(C < V < \infty) = \int_C^\infty g_v(v)\;dv = \alpha$$

நிபந்தனைக்குட்படும்படி பெறுகிறோம். இங்கு $g_v(v)$ ஆனது V மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவலாகும்.

கூறு மாறிகளின் கண்டறிந்த மதிப்புகளைக்கொண்டு v-ன்

$$v = \frac{ms_1^2/v_1}{ns_2^2/v_2}$$

மதிப்பைக் கணக்கிட்டு $v > C$ எனில் சூனிய எடுகோள் மறுக்கத் தக்கது எனவும், அவ்வாறில்லையெனில் சூனிய எடுகோள் மறுக்கத் தகாதது எனவும் உய்த்துணருகிறோம்.

(ii) $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ எனும் சூனிய எடுகோளுக்கு எதிராக $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ எனும் மாற்று எடுகோளை அமைக்கும்போது (v_1, v_2) கட்டின்மைகள் கொண்ட F-பரவல் மாறியான கூறு அளவை V ஆனது இடைவெளி $(0, d)$ யில் அடங்கியிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு α எனும்படி தீர்வுகட்டமான இடைவெளி $(0, d)$ஐ அமைத்து, V-ன் கண்டறிந்த மதிப்பு d-க்குக் குறைவெனில் சூனிய எடுகோள் மறுக்கத்தக்கது எனவும், அவ்வாறில்லையெனில் சூனிய எடுகோள் மறுக்கத்தகாதது எனவும் உய்த்துணருகிறோம்.

(iii) $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ எனும் சூனிய எடுகோளுக்கு எதிராக $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ எனும் மாற்று எடுகோளை அமைக்கும்போது (v_1, v_2) கட்டின்மைகள் கொண்ட F-பரவல் மாறியான கூறு அளவை V ஆனது

$(0, a)$, (b, ∞) ஆகிய இரு இடைவெளிகள் ஒவ்வொன்றிலும் அடங்கியிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\alpha/2$ என அமையும்படி எடுத்துக் கொண்டு, தீர்வு கட்டமான வெளியை $[(0, a) \cup (b, \infty)]$ பெறுகிறோம். V-ன் கண்டறிந்த மதிப்பானது தீர்வு கட்டமான வெளியில் அடங்கியிருப்பின் சூனிய எடுகோள் மறுக்கத்தக்கது எனவும், அவ்வாறில்லையெனில் அது மறுக்கத்தகாதது எனவும் உய்த்துணருகிறோம்.

கணக்கு

இரு பள்ளிகளைச் சார்ந்த மாணவர்களின் முழுமைத் தொகைகளிலிருந்து கூறுகள் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டு, கூறில் இடம்பெறும் மாணவர்களின் எடை (பவுண்டுகளில்) விவரங்களைப் பற்றிய கூறு அளவைகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

	பள்ளி A	பள்ளி B
கூறு மாறுபாடு	72	58
கூறு உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	10	11

இவ்விவரங்கள் வாயிலாக இரு பள்ளி மாணவர்களின் எடை பரவல்களின் வேறுபாடுகளின் விகிதத்தின் 90% நம்பிக்கை இடைவெளியை அமைக்க. மாணவர்களின் எடையைக் குறிக்கும் மாறி ஓர் இயல்நிலை மாறி எனக் கொள்க.

முறை

பள்ளி A-ன் மாணவர்களின் பரவலின் மாறுபாடு σ_1^2 எனவும், பள்ளி B-ன் மாணவர்களின் பரவலின் மாறுபாடு σ_2^2 எனவும் கொள்வோம். A, B ஆகிய இரு பள்ளிகளிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட கூறு மாணவர்களின் எண்ணிக்கைகளை முறையே m, n எனவும், அவர்களின் எடை மதிப்புகளின் மாறுபாடுகளை முறையே S_1^2, S_2^2 எனவும் குறிப்பிடும்போது அவைகளின் கண்டறிந்த மதிப்புகள்

$$m = 10, \quad n = 11, \quad S_1^2 = 72, \quad S_2^2 = 58$$

ஆக அமைகின்றன.

இப்போது ராண்டம் மாறி V-ன் பரவல் (9, 10) ஆகிய கட்டின்மைகள் கொண்ட F-பரவலாக அமையும்போது C_1, C_2 ஆகிய மெய்யெண்கள் கீழ்க்கண்ட

$$P_r(Y > C_2) = P_r(Y < C_1) = \frac{0.10}{2}$$

நிபந்தனைகளுக்கு உட்படுகிறதெனில்

$$C_1 = \frac{1}{3.13}$$

$$C_2 = 3.02$$

என F-அட்டவணையிலிருந்து பெறுகிறோம்.

எனவே,

$$a_1 = C_1 \frac{ns_2^2/(n-1)}{ms_1^2/(m-1)}$$

$$= \frac{1}{3.13} \times \frac{5742}{7200}$$

$$= 0.2548$$

$$a_2 = C_2 \frac{ns_2^2/(n-1)}{ns_1^2/(m-1)}$$

$$= 3.02 \times \frac{5742}{7200}$$

$$= 2.4085$$

ஆகின்றன.

இப்போது, இரு பள்ளி மாணவர்களின் எடை பரவல்களின் மாறுபாடுகளின் விகிதம் σ_1^2/σ_2^2-க்கான 90% நம்பிக்கை இடைவெளி

$$0.2548 < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 2.4085$$

ஆகும் என உய்த்துணருகிறோம்.

கணக்கு

தோல் பதனிடுதல், தீப்பெட்டி தயாரித்தல் ஆகிய தொழில்களில் ஈடுபட்டுள்ள தொழிலாளர்களின் மாத ஊதிய மதிப்புப் பரவல்கள் இயல்நிலைப் பரவல்கள் எனக் கொள்க. இப்பரவல்களிலிருந்து பெற்ற கூறு விவரங்கள் கீழ்க்கண்டன.

	தோல் பதனிடும் தொழிலாளர்கள்	தீப்பெட்டி தயாரிக்கும் தொழிலாளர்கள்
கூறு மாறுபாடு	202 ரூபாய்கள்	115 ரூபாய்கள்
கூறு உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	6	8

இவ்விவரங்கள் வாயிலாக இரு பரவல்களின் மாறுபாடுகள் சமமதிப்புடையனவா என 10% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்க.

முறை

தோல் பதனிடும் தொழிலாளர்கள், தீப்பெட்டி தயாரிக்கும் தொழிலாளர்களின் மற்ற ஊதிய மதிப்புப் பரவல்களின் மாறுபாடு களை முறையே σ_1^2, σ_2^2 எனக் குறிப்பிடுவோம். இப்போது

சூனிய எடுகோளின் கீழ் : $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ எனவும்

மாற்று எடுகோளின் கீழ் : $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ எனவும்

கொள்வோம்.

தோல்பதனிடும் தொழிலாளர்கள் முழுமைத் தொகுதி யிலிருந்து பெற்ற கூறு உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை, கூறுமதிப்பு களின் மாறுபாடு ஆகியவைகளை முறையே m, s_1^2 எனக் குறிப் பிடும்போது அவைகளின் கண்டறிந்த மதிப்புகள்

$$m = 6, \quad S_1^2 = 202$$

ஆக அமைகின்றன.

தீப்பெட்டி தயாரிக்கும் தொழிலாளர்களின் முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பெற்ற கூறு உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை, கூறு மதிப்புகளின் மாறுபாடு ஆகியவைகளை முறையே n, s_2^2 எனக் குறிப்பிடும்போது அவைகளின் கண்டறிந்த மதிப்புகள்

$$n = 8, \quad s_2^2 = 115$$

ஆகின்றன.

இப்போது, கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகள் வாயிலாகக் கூறு அளவை V-ன் மதிப்பைப் பெறுகிறோம்.

$$V = \frac{ms_1^2/(m-1)}{ns_2^2/(n-1)}$$

$$= \frac{(6 \times 202)/5}{(8 \times 115)/7}$$

$$= 1{\cdot}23$$

சூனிய எடுகோளின் கீழ் ராண்டம் மாறி V-ன் பரவல் $(5, 7)$ கட்டின்மைகள் கொண்ட F-பரவலாக அமைவதால் a, b ஆகிய இரு மெய்யெண்கள் கீழ்க்கண்ட நிபந்தனைகளுக்கு உட்படுகிறதெனில்

$$P_r (V > b) = P_r (V < a) = \frac{0.10}{2}$$

அவைகளின் மதிப்புகள்

$$b = 3.97, \quad a = \frac{1}{4.88}$$

என F-அட்டவணையிலிருந்து பெறுகிறோம்.

சோதனைக்கு ஏற்றதான தீர்வுகட்டமான வெளி

$$\{ v : 0 \leq v \leq a \} \cup \{ v : b \leq v < \infty \}$$

$$= \left\{ v : 0 \leq v \leq \frac{1}{4.88} \right\} \cup \left\{ v : 3.97 \leq v < \infty \right\}$$

ஆகும்.

இப்போது, கூறு அளவை V-ன் கண்டறிந்த மதிப்பு 1.23 ஆனது தீர்வுகட்டமான வெளியில் அடங்கியிராததாலால், சூனிய எடுகோள் மறுக்கத்தகாதது என உய்த்துணருகிறோம். ஆகவே, கொடுக்கப்பட்ட கூறு விவரங்கள் வாயிலாகத் தோல் பதனிடும் தொழிலாளர்கள், தீப்பெட்டி தயாரிக்கும் தொழிலாளர்கள் ஆகியோர்களின் மாத ஊதிய மதிப்புப் பரவல்களின் மாறுபாடுகள் சமமதிப்புடையன என 10% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் உய்த்துணருகிறோம்.

கணக்கு

இரும்பு ஆணிகள் தயாரிக்கும் தொழிற்சாலை ஒன்றில் ஒரு நாள் பகல் பிரிவு (Day shift), இராப் பிரிவு (Night shift) நேரங்களில் தயாரிக்கப்பட்ட ஆணிகளின் நீள மதிப்புகளின் கூறு விவரங்கள் பின் வருமாறு:

	பகல் பிரிவு	இராப் பிரிவு
கூறு மாறுபாடு	1.17 மில்லி மீட்டர்	3.51 மில்லி மீட்டர்
கூறு உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	13	10

இவ்விவரங்கள் வாயிலாகப் பகல் பிரிவில் தயாரிக்கப்படும் ஆணிகளின் நீள மதிப்புப் பரவல் மாறுபாடு இராப்பிரிவில் தயாரிக்கப்படும் ஆணிகளின் நீள மதிப்புப் பரவல் மாறுபாட்டைவிடக் குறைவாகும் எனக் கொள்ளலாமா என்பதை 5 சதவிகித மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்க. ஆணிகளின் நீள மதிப்புப் பரவல், ஓர் இயல்நிலைப் பரவலாக அமைகிறது எனக் கொள்க.

முறை

பகல்பிரிவில் தயாரிக்கப்படும் ஆணிகளின் நீள மதிப்புப் பரவல் மாறுபாட்டை σ_1^2 எனவும், இராப்பிரிவில் தயாரிக்கப்படும் ஆணிகளின் நீள மதிப்புப் பரவல் மாறுபாட்டை σ_2^2 எனவும் குறிப்பிடுவோம்.

இப்போது,

சூனிய எடுகோளின் கீழ் : $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ எனவும்

மாற்று எடுகோளின் கீழ் : $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ எனவும்

கொள்வோம்.

பகல் பிரிவைச் சார்ந்த கூறு ஆணிகளின் எண்ணிக்கை அவைகளின் நீள மதிப்புகளின் மாறுபாடு ஆகியவைகளை முறையே m, S_1^2 எனக் குறிப்பிடும்போது அவைகளின் கண்டறிந்த மதிப்புகள்

$$m = 13, \quad S_1^2 = 1{\cdot}17$$

ஆகின்றன.

இப்பிரிவைச் சார்ந்த கூறுகளின் எண்ணிக்கை, அவைகளின் நீள மதிப்புகளின் மாறுபாடு ஆகியவைகளை முறையே n, S_2^2 எனக் குறிப்பிடும்போது அவைகளின் கண்டறிந்த மதிப்புகள்

$$n = 10, \quad S_2^2 = 3{\cdot}51$$

ஆகின்றன.

இப்போது, கூறு அளவை V-ன் மதிப்பைப் பெறுகிறோம்.

$$V = \frac{m\, S_1^2 / (m-1)}{n\, S_2^2 / (n-1)}$$

$$= \frac{(13 \times 1{\cdot}17) / 12}{(10 \times 3{\cdot}51) / 9}$$

$$= 0{\cdot}325$$

சூனிய எடுகோளின்கீழ் ராண்டம் மாறி V-ன் பரவல் (12, 9) கட்டின்மைகளைக் கொண்ட F-பரவலாக அமைவதால் மெய்யெண் C கீழ்க்கண்ட

$$P_r\ (V < C) = 0{\cdot}05$$

நிபந்தனைக்குட்படுகிறதெனில் அதன் மதிப்பு

$$C = \frac{1}{2{\cdot}80} = 0{\cdot}357$$

என F அட்டவணையிலிருந்து பெறுகிறோம். சோதனைக்கு ஏற்ற தான தீர்வுகட்டமான வெளி

$$\{ v : \ 0 \leq v \leq 0{\cdot}357 \}$$

ஆகும்.

இப்போது கூறு அளவை V-ன் கண்டறிந்த மதிப்பு 0·325 ஆனது தீர்வுகட்டமான வெளியில் உள்ளடங்கியிருப்பதால், சூனிய எடுகோள் மறுக்கத்தக்கது என உய்த்துணருகிறோம். ஆகவே, கூறுவிவரங்கள் வாயிலாக, பகல் பிரிவில் தயாரிக்கப்படும் ஆணிகளின் நீள மதிப்புப் பரவல் மாறுபாடு, இராப்பிரிவில் தயாரிக்கப்படும் ஆணிகளின் நீள மதிப்புப் பரவல் மாறுபாட்டைவிடக் குறைவாகும் என 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் உய்த்துணருகிறோம்.

7. அணுகுகோடு கூறு பரவல்களும் பயன் முறைகளும்

(Asymptotic Sampling Distributions and Applications)

இயல்நிலைப் பரவலிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்படும் சம வாய்ப்புக் கூறு மாறிகளின் சார்புகளான கைவர்க்கம், t, F ஆகியவைகளின் திருத்தமான கூறு பரவல்களைப் பற்றியும் அவைகளின் பயன் முறைகளைப்பற்றியும் முன் அத்தியாயத்தில் கண்டோம். இப்போது இயல்நிலைப் பரவல் அல்லாத வேறு பரவல்களிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட பெருங்கூறு மாறிகளைக் கொண்டு அமைக்கும் கூறு அளவைகளின் அணுகுகோடு பரவல்களைப் பற்றியும் இவைகளை அடிப்படையாகக் கொண்டு புள்ளியியல் மதிப்பிடுதல், புள்ளியியல் சோதனைகள் ஆகிய உய்த்துணர்வு முறைகளை மேற்கொள்வது பற்றியும் காண்போம்.

ஒரு ராண்டம் மாறி X-ன் சுட்டுறுப்பு θ எனவும், $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ஆகியன X பரவலிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்படும் ஒரு பெருங்கூறு எனவும் கொள்வோம். சுட்டுறுப்பு θ-ன் மதிப்பு தெரியாதபோது, இதை மதிப்பிடுவதற்கு ஒரு கூறு அளவை

$$\phi = \phi\ (X_1, X_2, \ldots, X_n)\text{-ஐ } E(\phi) = \theta$$

எனும் நிபந்தனைக்குட்படும்படி, அதாவது ϕ-ன் கூறு பரவலின் சராசரி θ ஆக அமையும்படி, எடுத்துக் கொள்ளவேண்டும். கூறு அளவை ϕ-ன் திட்ட விலக்கம் $D(\phi)$ எனக் குறிப்பிடுவோம். இப்போது, Z மாறியின்

$$Z = \frac{\phi - E(\phi)}{D(\phi)}$$

அணுகுகோடு பரவலானது திட்ட இயல்நிலைப் பரவலாக அமைகிறது என்பது ஒரு முக்கிய தேற்றமாகும். இத்தேற்றத்தின் வாயிலாக (i) சுட்டுறுப்பு θ-க்கான நம்பிக்கை இடைவெளியை ஏற்படுத்துவது பற்றியும் (ii) சுட்டுறுப்பு θ-ன் மதிப்பு θ_0 எனும் கொடுக்கப்படும் நிலையெண்ணாக அமையுமா என சோதிக்கும் முறையைப் பற்றியும் கீழே காண்போம்.

(i) இப்போது, Z மாறியின்

$$Z = \frac{\phi - \theta}{D(\phi)}$$

அணுகுகோடு பரவலானது திட்ட இயல்நிலைப் பரவலாக அமைவதால், $C_1 < C_2$ என அமையும். C_1, C_2 ஆகிய மெய் யெண்களைக் கீழ்க்கண்ட நிபந்தனைக்குட்படும்படி

$$P_r(C_1 < Z < C_2) = \int_{C_1}^{C_2} f_Z(x)\, dx$$

$$= \int_{C_1}^{C_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

$$= 1-\alpha, \quad 0 < \alpha < 1$$

எடுத்துக்கொள்கிறோம். இங்கு C_1, C_2 ஆகியவைகள் α-ஐச் சார்ந்துள்ள மதிப்புகளாகும்.

இப்போது,

$$\text{நிகழ்ச்சி } (C_1 < Z < C_2) = \text{நிகழ்ச்சி } \left(C_1 < \frac{\phi-\theta}{D(\phi)} < C_2\right)$$

$$= \text{நிகழ்ச்சி } (\phi - C_2 D(\phi) < \theta < \phi - C_1 D(\phi))$$

ஆகுமாதலால்,

$$P_r\{\phi - C_2 D(\phi) < \theta < \phi - C_1 D(\phi)\} = P_r(C_1 < Z < C_2)$$

$$= 1 - \alpha, \text{ ஆகும்.}$$

எனவே,

$\phi - C_2 D(\phi)$, $\phi - C_1 D(\phi)$ ஆகிய சார்புகளைக் கொண்டு அமைக்கப்படும் இடைவெளி $[\phi - C_2 D(\phi), \phi - C_1 D(\phi)]$-ஐச் சுட்டுறுப்பு θ-க்கான 'ராண்டம் இடைவெளி' என வழங்குகிறோம்.

$X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ ஆகிய கூறுமாறிகளின் கண்டறிந்த மதிப்புகள் முறையே $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ எனில்,

$$a_1 = \phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) - C_2 D(\phi)$$
$$a_2 = \phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) - C_1 D(\phi)$$

ஆகிய மெய்யெண் மதிப்புகளைக் கொண்டு அமைக்கப்படும் இடைவெளி (a_1, a_2)-ஐச் சுட்டுறுப்பு θ-க்கான $(1 - \alpha)$ சதவீத **நம்பிக்கை இடைவெளி** என அழைக்கிறோம்.

(ii) இப்போது சுட்டுறுப்பு θ-ன் மதிப்பு θ_0 ஆகுமென சூனிய எடுகோளை அமைத்துக் கொள்வோம். அடுத்து சோதனைக்கு ஏற்றதான கூறு அளவையாக Z-ஐ

$$Z = \frac{\phi - \theta_0}{D(\phi)}$$

எடுத்துக் கொள்வோம். சூனிய எடுகோள் உண்மையாயின் Z மாறியின் அணுகுகோடு பரவல் திட்ட இயல்நிலைப் பரவலாக அமைகிறது.

சூனிய எடுகோளுக்கு எதிராக மாற்று எடுகோள் $\theta > \theta_0$ என அமைப்போமெனில், சோதனைக்கு ஏற்றதாகத் தீர்வுகட்டமான வெளி w-ஐ

$$w = \{x : C \leq x < \infty\} \text{ என}$$

எடுத்துக் கொள்கிறோம். இங்கு மெய்யெண் C கீழ்க்கண்ட

$$\int_C^{\infty} f_z(x)\, dx = \int_C^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = a, \quad 0 < a < 1$$

நிபந்தனைக்கு உட்பட்டு அமைகிறது.

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ ஆகிய கூறுமாறிகளின் கண்டறிந்த மதிப்புகள் முறையே $x_1, x_2, \ldots, x_n$ எனில், Z மாறியின் மதிப்பு

$$z = \frac{\phi(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) - \theta_0}{D(\phi)}$$

எனக் குறிப்போம். $z \in R$ எனில், சூனிய எடுகோள் மறுக்கத் தக்கது எனவும், $z \notin R$ எனில் சூனிய எடுகோள் மறுக்கத்தகாதது எனவும் உய்த்துணருகிறோம்.

சூனிய எடுகோளுக்கு எதிராக மாற்று எடுகோள் $\theta < \theta_0$ என அமைப்போமெனில், சோதனைக்கு ஏற்றதாகத் தீர்வுகட்டமான வெளி w-ஐ

$$w = \{ x : -\infty < x \leq C \}$$

கீழ்க்கண்ட நிபந்தனைக்கு

$$P_r(Z \in w) = \int_{-\infty}^{C} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = a, \quad 0 < a < 1$$

உட்படும்படி ஆகவும், சூனிய எடுகோளுக்கு எதிராக மாற்று எடுகோள் $\theta \neq \theta_0$ என அமைப்போமெனில், சோதனைக்கு ஏற்றதாகத் தீர்வுகட்டமான வெளி w-ஐ

$$w = w_1 \cup w_2$$
$$w_1 = \{ x : -\infty < x \leq a \}$$
$$w_2 = \{ x : b \leq x < \infty \}$$

கீழ்க்கண்ட நிபந்தனைக்கு

$$P_r (Z \in w_1) = \int_{-\infty}^{a} f_z (x)\, dx = \frac{a}{2}$$

$$P_r (Z \in w_2) = \int_{b}^{\infty} f_z (x)\, dx = a/2$$

உட்படும்படியாகவும் எடுத்துக்கொண்டு சோதனையை மேற்கொண்டு உய்த்துணருகிறோம்.

இப்போது சில முக்கியமான கூறு அளவைகளின் சராசரி, திட்டவிலக்கம் ஆகியவைகளைப் பெறுவோம். கூறு அளவையின் திட்டவிலக்கத்தைத் **திட்டப் பிழை** (Standard error) என அழைக்கிறோம்.

கூறு சராசரி

ஒரு ராண்டம் மாறி X-ன் சராசரி μ, மாறுபாடு σ^2 எனக் கொள்வோம். X பரவலிலிருந்து பெற்ற சமவாய்ப்புக் கூறு $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ எனில், கூறின் சராசரி

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

ஆகும்.

கூறு சராசரியின் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு

$$E(\bar{X}) = E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right]$$
$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$
$$= \frac{1}{n}\, n\, \mu$$
$$= \mu$$

ஆகும்.

கூறு சராசரியின் மாறுபாடு,

$$D^2(\bar{X}) = E(\bar{X} - \mu)^2$$

$$= E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)\right]^2$$

$$= \frac{1}{n^2} E\left\{ \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 + \sum_{i \neq j} (X_i - \mu)(X_j - \mu) \right\}$$

$$= \frac{1}{n^2} \left\{ \sum_{i=1}^{n} E(X_i - \mu)^2 + \sum_{i \neq j = 1} E(X_i - \mu)(X_j - \mu) \right\}$$

இப்போது, $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ ஆகிய மாறிகள் சார்பற்றன வாதலால்,

(i) $E(X_i - \mu)(X_j - \mu)$

$$= E(X_i - \mu)\, E(X_j - \mu), \quad i \neq j = 1, 2, \ldots, n$$
$$= 0$$

(ii) $E(X_i - \mu)^2 = \sigma^2, \qquad i = 1, 2, \ldots\ldots, n$

எனவே, $D^2(\bar{X}) = \dfrac{n\,\sigma^2}{n^2} = \dfrac{\sigma^2}{n}$

எனவே, கூறு சராசரியின் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு, திட்டப்பிழை ஆகியவைகள் முறையே

$$E(\bar{X}) = \mu$$

$$(D\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ஆகும்.

இரு கூறு சராசரிகளின் வேறுபாடு

ஒரு ராண்டம் மாறி X-ன் சராசரி μ_1, மாறுபாடு σ_1^2 ஆகியன உளதாயிருக்கின்றன எனவும், மற்றொரு மாறி Y-ன் சராசரி μ_2, மாறுபாடு σ_2^2 ஆகியன உளதாயிருக்கின்றன எனவும் கொள்வோம்.

X பரவலிலிருந்து பெற்ற சமவாய்ப்புக் கூறு $X_1, X_2, \ldots, X_{n_1}$ எனில், கூறு சராசரி

$$\bar{X} = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} X_i$$

ஆகும்.

Y பரவலிலிருந்து பெற்ற சமவாய்ப்புக் கூறு $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n2}$ எனில், கூறு சராசரி

$$\bar{Y} = \frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} Y_j$$

ஆகும்.

இப்போது, இரு கூறு சராசரிகளின் வேறுபாடு $(\bar{X} - Y)$ ஆகும். இதன் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு

$$E(\bar{X} - \bar{Y}) = E(\bar{X}) - E(\bar{Y})$$
$$= \mu_1 - \mu_2$$

ஆகும்.

$(\bar{X} - \bar{Y})$-ன் மாறுபாடு,

$$D^2(\bar{X} - \bar{Y}) = E\{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)\}^2$$
$$= E\{(\bar{X} - \mu_1) - (\bar{Y} - \mu_2)\}^2$$
$$= E(\bar{X} - \mu_1)^2 + E(\bar{Y} - \mu_2)^2 - 2E\{(\bar{X} - \mu_1)(\bar{Y} - \mu_2)\}$$
$$= \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}, \quad \because E[(\bar{X} - \mu_1)(Y - \mu_2)]$$
$$= E(\bar{X} - \mu_1)\, E(\bar{Y} - \mu_2)$$
$$= 0$$

எனவே, இரு கூறு சராசரிகளின் வேறுபாடு $(\bar{X} - \bar{Y})$-ன் எதிர் பார்க்கும் மதிப்பு, திட்டவிலக்கம் ஆகியன முறையே

$$E(\bar{X} - Y) = \mu_1 - \mu_2$$

$$D(X - \bar{Y}) = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

ஆக அமைகின்றன.

கூறு மாறுபாடு

ஒரு ராண்டம் மாறி X-ன் சராசரி μ, மாறுபாடு $\mu_2 = \sigma^2$, மூன்றுவது, நான்காவது நடுவிலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் முறையே μ_3, μ_4 ஆகியன உளதாயிருக்கின்றன எனக் கொள்வோம். X பரவலிலிருந்து பெற்ற சமவாய்ப்புக் கூறு $X_1, X_2 \ldots,$ X_n எனில் கூறின் மாறுபாடு

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$$

ஆகும்.

கூறு மாறுபாட்டின் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு

$$E(S^2) = E\left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 \right\}$$

$$= E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \{ (X_i - \mu) - (X - \mu) \}^2 \right]$$

$$= E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 - (\overline{X} - \mu)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(X_i - \mu)^2 - E(\overline{X} - \mu)^2$$

$$= \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n}$$

$$= \frac{n-1}{n} \sigma^2$$

ஆகும்.

'n' ஆனது பெருமதிப்புடையதெனில், $E(S^2) = \sigma^2$ என்கிறோம்.

கூறுமாறுபாட்டின் வேறுபாடு

$$D^2(S^2) = E\{ S^2 - E(S^2) \}^2$$
$$= E\{(S^2)\} - \{E(S^2)\}^2$$

இப்போது,

$$E\{(S^2)\} = E\left\{ \frac{1}{n} \Sigma (X_i - \overline{X})^2 \right\}^2$$

$$= E\left[\frac{1}{n} \Sigma \{ (X_i - \mu) - (\overline{X} - \mu) \}^2 \right]^2$$

$$= E\left[\frac{1}{n} \Sigma (X_i - \mu)^2 - (\overline{X} - \mu)^2 \right]^2$$

$$= E\left[\left\{ \frac{1}{n^2} \Sigma (X_i - \mu)^2 \right\}^2 - \frac{2}{n} (\overline{X} - \mu) \Sigma (X_i - \mu)^2 + (\overline{X} - \mu)^4 \right]$$

$$= \frac{1}{n^2} E \left\{ \Sigma (X_i - \mu)^2 \right\}^2 - \frac{2}{n} E \{ (\bar{X} - \mu)^2 \Sigma (X_i - \mu)^2 \} + E (\bar{X} - \mu)^4$$

ஆகும்.

$$E \{ \Sigma (X_i - \mu) \}^2 = E \{ \sum_i (X_i - \mu)^4 + \sum_{i \neq j} (X_i - \mu)^2 (X_j - \mu)^2 \}$$

$$= n\mu_4 + n(n-1) \mu_2^2$$

$$E \{ (\bar{X} - \mu)^2 \Sigma (X_i - \mu)^2 \} = E \left[\left\{ \frac{1}{n} \Sigma (X_i - \mu)^2 \right\} \Sigma (X_i - \mu)^2 \right]$$

$$= \frac{\mu_4 + (n-1) \mu_2^2}{n}$$

$$E \{ (\bar{X} - \mu)^4 \} = \frac{1}{n^4} E [\{ \Sigma (X_i - \mu) \}^4]$$

$$= \frac{\mu_4 + 3(n-1) \mu_2^2}{n^3}$$

$$E \{ (S^2)^2 \} = \mu_2^2 + \frac{\mu_4 - 3\mu_2^2}{n} - \frac{2\mu_4 - 5\mu_2^2}{n^2} + \frac{\mu_4 - 3\mu_2^2}{n^3}$$

ஆகும்.

எனவே, $D^2 (S^2) = E \{ (S^2)^2 \} - \{ E (S^2) \}^2$

$$= \frac{\mu_4 - \mu_2^2}{n} - \frac{2(\mu_4 - 2\mu_2^2)}{n^2} + \frac{\mu_4 - 3\mu_2^2}{n^3}$$

ஆகும்.

n பெருமதிப்புடையதெனில்,

$$D^2 (S^2) = \frac{\mu_4 - \mu_2^2}{n}$$ என்கிறோம்.

இப்போது, கூறு உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கை 'n' பெரு மதிப் புடையதெனில், கூறு மாறுபாட்டின் சராசரி, திட்டப்பிழை ஆகியவைகள் முறையே

$$E (S^2) = \mu_2, \quad D (S^2) = \sqrt{\frac{\mu_4 - \mu_2^2}{n}}$$ ஆக அமை கின்றன.

X மாறி ஓர் இயல்நிலை $N (\mu, \sigma^2)$ மாறியெனில் $\mu_4 = 3\sigma^4$, $\mu_2 = \sigma^2$ ஆக அமைகின்றன.

அப்போது, $D(S^2) = \sqrt{\dfrac{\mu_4 - \mu_2^2}{n}}$

$= \sqrt{\dfrac{2}{n}}\,\sigma^2$

ஆகும்.

கூறு திட்ட விலக்கம்

ஒரு ராண்டம் மாறி X-ன் சராசரி, மாறுபாடு, மூன்றாவது நான்காவது நடுவிலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் முறையே μ, $\mu_2 (= \sigma^2)$, μ_3, μ_4 ஆகியன உளதாயிருக்கின்றன என்போம்.

X பரவலிலிருந்து பெற்ற சமவாய்ப்புக் கூறு $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ எனில், கூறு திட்டவிலக்கம்

$$S = \sqrt{\frac{1}{n}\Sigma (X_1 - \bar{X})^2}$$

ஆகும்.

இப்போது,

$$S - \sigma = \frac{(S^2 - \sigma^2)}{2\sigma} - \frac{(S^2 - \sigma^2)^2}{2\sigma (S + \sigma)^2}$$

ஆகும்.

முன் பகுதியில் $E(S^2) = \dfrac{n-1}{n}\sigma^2$ எனப் பெற்றோம்.

ஆதலால் $E\left(\dfrac{S^2 - \sigma^2}{2\sigma}\right) = O\left(\dfrac{1}{n}\right)$

இப்போது, $\left|\dfrac{(S^2 - \sigma^2)^2}{2\sigma (S + \sigma)^2}\right| < \dfrac{(S^2 - \sigma^2)^2}{2\sigma^3}$

ஆக அமைகிறது.

$$\therefore\ E\left\{\left|\frac{(S^2 - \sigma^2)^2}{2\sigma (S + \sigma)^2}\right|\right\} \leq \frac{E(S^2 - \sigma^2)^2}{2\sigma^3} = \frac{D^2(S^2)}{2\sigma^3}$$

முன் பகுதியில் $D^2(S^2) = \dfrac{\mu_4 - \mu_2^2}{n} - \dfrac{2(\mu_4 - 2\mu_2^2)}{n^2} + \dfrac{\mu_4 - 3\mu_2^2}{n}$ எனப் பெற்றோம்.

ஆதலால் $D^2(S^2) = O\left(\dfrac{1}{n}\right)$

இப்போது $$E(S-\sigma) = E\left(\frac{S^2-\sigma^2}{2\sigma}\right) - E\left[\frac{(S^2-\sigma^2)^2}{2\sigma(S^2+\sigma^2)}\right]$$
$$= O\left(\frac{1}{n}\right)$$

அதாவது $$E(S) = \sigma + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

ஆகும்.

இது போன்றே,

$$D^2(S) = \frac{\mu_4 - \mu_2^2}{4n\,\mu_2} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

ஆகப் பெறுகிறோம்.

கூறு உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கை 'n' பெரு மதிப்புடையதெனில், கூறு திட்டவிலக்கத்தின் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு, திட்டப் பிழை ஆகியவைகள் முறையே

$$E(S) = \sigma$$

$$D(S) = \sqrt{\frac{\mu_4 - \mu_2^2}{4n\,\mu_2}}$$

ஆக அமைகின்றன.

X மாறியின் பரவல் இயல்நிலை $N(\mu, \sigma^2)$ பரவலெனில் $\mu_4 = 3\sigma^4$, $\mu_2 = \sigma^2$ ஆகின்றன. அப்போது

$$D(S) = \sqrt{\frac{\mu_4 - \mu_2^2}{4n\,\mu_2}}$$
$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2n}}$$

இரு கூறு திட்ட விலக்கங்களின் வேறுபாடு

ஒரு ராண்டம் மாறி X-ன் திட்டவிலக்கம் σ_1 எனவும், மற்றொரு ராண்டம் மாறி Y-ன் திட்டவிலக்கம் σ_2 எனவும் X பரவலிலிருந்து பெற்ற சம வாய்ப்புக் கூறு $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_{n_1}$ எனவும், Y பரவலிலிருந்து பெற்ற சம வாய்ப்புக் கூறு $Y_1, Y_2, \ldots\ldots, Y_{n_2}$ எனவும் இவ் விரு [illegible] எனவும் கொள்வோம்.

இப்போது,

$$X \text{— கூறு திட்டவிலக்கம்} \quad S_1 = \sqrt{\frac{1}{n_1} \sum_{1}^{n_1} (X_i - \bar{X})^2}$$

$$Y \text{— கூறு திட்டவிலக்கம்} \quad S_2 = \sqrt{\frac{1}{n_2} \sum_{1}^{n_2} (Y_i - \bar{Y})^2}$$

கூறு அளவைகளை எடுத்துக் கொள்வோம். n_1, n_2 ஆகியவைகள் பெரு மதிப்புடையன எனவும், X, Y ஆகியன இயல்நிலை மாறிகள் எனவும் கொள்ளும்போது,

$$E(S_1) = \sigma_1 \qquad , \qquad E(S_2) = \sigma_2$$

$$D(S_1) = \frac{\sigma_1}{\sqrt{2n_1}} \qquad , \qquad D(S_2) = \frac{\sigma_2}{\sqrt{2n_2}}$$

ஆக அமைகின்றன.

ஆதலால், கூறு திட்டவிலக்கங்களின் வேறுபாடு $(S_1 - S_2)$-ன் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு, திட்டப் பிழை ஆகியவைகள் முறையே

$$E(S_1 - S_2) = (\sigma_1 - \sigma_2) \quad \text{எனவும்,}$$

$$\begin{aligned} D(S_1 - S_2) &= \sqrt{D^2(S_1 - S_2)} \\ &= \sqrt{D^2(S_1) + D^2(S_2)} \\ &= \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{2n_1} + \frac{\sigma_2^2}{2n_2}} \quad \text{எனவும்} \end{aligned}$$

அமைகின்றன.

கூறு விகிதம்

ஒரு தனித்த ராண்டம் மாறி X-ன் பரவல் கீழ்க்கண்ட இரு புள்ளிப் பரவல்

$$\begin{aligned} P_r(X = 0) &= 1 - p, \\ P_r(X = 1) &= p, \qquad (0 < p < 1) \end{aligned}$$

எனக் கொள்வோம்.

X பரவலிலிருந்து பெற்ற சமவாய்ப்புக் கூறு $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ எனில், கூறுவிகிதம்

$$\pi = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

ஆகும்.

கூறு விகிதத்தின் சராசரி

$$E(\pi) = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right]$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

$$= \frac{np}{n} = p \text{ ஆகும்.}$$

கூறு விகிதத்தின் மாறுபாடு

$$D^2(\pi) = E(\pi - p)^2$$

$$= E\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - p)\right\}^2$$

$$= \frac{1}{n^2} E\left\{\sum_{i=1}^{n}(X_i-p)^2 + \sum_{i\neq j=1}^{n} E(X_i-p)(X_j-p)\right\}$$

$$= \frac{1}{n^2}\left\{\sum_{i=1}^{n} E(X_i-p)^2 + \sum_{i\neq j=1}^{n} E(X_i-p)(X_j-p)\right\}$$

இப்போது, X_1, X_2, ..., X_n ஆகியன சார்பற்ற மாறிகளாவதால்

(i) $E(X_i-p)(X_j-p) = E(X_i-p)\, E(X_j-p)$
$= 0, \quad i\neq j = 1, 2, \ldots, n.$

(ii) $E(X_i-p)^2 = p(1-p), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$

ஆதலால்

$$D^2(\pi) = \frac{np(1-p)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n} \text{ ஆகும்.}$$

எனவே, கூறு விகிதம் π-ன் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு, திட்டப்பிழை ஆகியவைகள் முறையே,

$$E(\pi) = p$$
$$D(\pi) = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

ஆகும்.

இரு கூறு விகிதங்களின் வேறுபாடு

ஒரு தனித்த மாறி X-ன் பரவல்

$$P_r(X = 0) = 1 - p_1$$
$$P_r(X = 1) = p_1$$

எனவும், மற்றொரு தனித்த மாறி Y-ன் பரவல்

$$P_r(Y = 0) = 1 - p_2$$
$$P_r(Y = 1) = p_2$$

எனவும், $0 < p_1 < 1$, $0 < p_2 < 1$ எனவும் கொள்வோம்.

X பரவலிலிருந்து பெற்ற சமவாய்ப்புக் கூறு $X_1, X_2, \ldots, X_{n_1}$ எனில், X கூறு விகிதம்

$$\pi_1 = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} X_i$$

ஆகும்.

Y பரவலிலிருந்து பெற்ற சமவாய்ப்புக் கூறு $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_2}$ எனில், Y கூறு விகிதம்

$$\pi_2 = \frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} Y_j$$

ஆகும்.

இப்போது இரு கூறு விகிதங்களின் வேறுபாடு $(\pi_1 - \pi_2)$-ன் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு

$$E(\pi_1 - \pi_2) = E(\pi_1) - E(\pi_2)$$
$$= p_1 - p_2 \quad \text{ஆகும்.}$$

$(\pi_1 - \pi_2)$-ன் மாறுபாடு

$$D^2(\pi_1 - \pi_2) = E\{(\pi_1 - \pi_2) - (p_1 - p_2)\}^2$$
$$= E\{(\pi_1 - p_1) - (\pi_2 - p_2)\}^2$$
$$= E\{\pi_1 - p_1)^2 + (\pi_2 - p_2)^2 - 2(\pi_1 - p_1)(\pi_2 - p_2)\}$$
$$= E\{\pi_1 - p_1)^2\} + E\{(\pi_2 - p_2)^2\} - 2E\{(\pi_1 - p_1)(\pi_2 - p_2)\}$$

இப்போது,

$$E\,(\pi_1-p_1)^2 = \frac{p_1(1-p_1)}{n_1}$$

$$E\,\{(\pi_2-p_2)^2\} = \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}$$

$$E\,\{(\pi_1-p_1)(\pi_2-p_2)\} = E\,(\pi_1-p_1)\,E\,(\pi_2-p_2)$$
$$= 0$$

ஆதலால்,

$$D^2\,(\pi_1-\pi_2) = \frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}$$ ஆகும்.

எனவே, X, Y ஆகிய மாறிகளின் கூறு விகிதங்களின் வேறுபாட்டின் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு, திட்டப் பிழை ஆகியன முறையே,

$$E\,(\pi_1-\pi_2) = p_1-p_2$$

$$D\,(\pi_1-\pi_2) = \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}$$

ஆக அமைகின்றன.

கூறு ஒட்டுறவுக் கெழு

X, Y ஆகிய ரண்டம் மாறிகளின் ஒட்டுறவுக் கெழு ρ எனவும், இவ்விணைந்த மாறிகளின் பரவலிலிருந்து பெற்ற சம வாய்ப்புக் கூறு (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), ..., (X_n, Y_n) எனவும், கூறு ஒட்டுறவுக் கெழு r

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})}{\sqrt{\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right\}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2\right\}}}$$

எனவும் கொள்வோம்.

இணைந்த மாறிகள் (X, Y)-ன் (l, m)-வது நடுவிலக்கப் பெருக்குத் தொகையை

$$\mu_{lm} = E\,\{(X-E(X))^l\,(Y-E(Y))^m\},$$
$$l = 0, 1, 2, \ldots;\quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

எனக் குறிப்பிடுவோம்.

கூறு உருவ அளவு n பெருமதிப்புடையதெனில், கூறு அளவை r-ன் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு, திட்டப்பிழை ஆகியவை

$$E(r) = \rho$$

$$D(r) = \left\{ \frac{\rho^2}{4n}\left(\frac{\mu_{40}}{\mu_{20}^2} + \frac{\mu_{04}}{\mu_{02}^2} + \frac{2\mu_{22}}{\mu_{02}\,\mu_{20}} + \frac{4\mu_{22}}{\mu_{11}^2} - \frac{4\,\mu_{31}}{\mu_{20}\,\mu_{11}} - \frac{4\,\mu_{13}}{\mu_{02}\,\mu_{11}} \right) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

ஆக அமைகின்றன.

(X, Y) மாறிகளின் பரவல் இருமாறி இயல்நிலைப் பரவலாக அமையுமெனில்

$$D(r) = \frac{1 - \rho^2}{\sqrt{n}}$$

ஆக அமைகிறது.

பின்வரும் பகுதிகளில் K_α எனும் குறியீடு திட்ட இயல்நிலைப் பரவலின் α சதவீத நிகழ்தகவுப் புள்ளி மதிப்பைக் குறிக்கும். அதாவது K_α ஆனது கீழ்க்கண்ட

$$\int_{K_\alpha}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \alpha\,, \qquad 0 < \alpha < 1$$

நிபந்தனைக்கு உட்பட்டு அமைகிறது என்கிறோம்.

சராசரிக்கான நம்பிக்கை இடைவெளி

ஒரு ராண்டம் மாறி X-ன் பரவல் சராசரி μ என்க. X பரவலிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட சமவாய்ப்புக் கூறு $X_1, X_2, \ldots, X_n$ மாறிகளைக் கொண்டு μ-க்கு $(1-\alpha)$ சதவீத நம்பிக்கை இடைவெளியை அமைப்பதுபற்றி இப்போது காண்போம்.

கூறு மாறிகள் $X_1, X_2, \ldots, X_n$, ஆகியவைகளின் சராசரி $\bar{X}$-ன் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு μ ஆக அமைவதால், பரவல் சராசரி μ-ஐ மதிப்பிட ஏற்றதான கூறு அளவை $\bar{X}$ எனக் கொள்கிறோம்.

கூறு சராசரி $\bar{X}$-ன் அணுகுகோடு பரவலானது இயல்நிலைப் பரவலாக அமைவதால், பரவல் சராசரி μ-க்கு அமைக்கும் $(1-\alpha)$ சதவீத ராண்டம் இடைவெளி

$$\bar{X} - K_{\frac{\alpha}{2}} D(\bar{X}) \leq \mu \leq \bar{X} + K_{\frac{\alpha}{2}} D(\bar{X})$$

ஆகும்.

இங்கு $D(\bar{X}) = \bar{X}$-ன் திட்டப்பிழை $= \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ஆகும்.

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ ஆகிய கூறு மாறிகளின் கண்டறிந்த மதிப்புகள் முறையே $x_1, x_2, \ldots, x_n$ எனில், கூறு சராசரி $\bar{X}$-ன் மதிப்பை $\bar{x}$ எனக் குறிப்பிட்டு, μ-க்கான $(1-\alpha)$ சதவீத நம்பிக்கை இடைவெளி

$$\bar{x} - K_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + K_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ஆக அமையும் என்கிறோம்.

பரவல் திட்ட விலக்கம் σ-ன் மதிப்புத் தெரியாதாயின் கூறு திட்டவிலக்க மதிப்பு s-ஐ σ-க்குப் பிரதியிடுகிறோம்.

கணக்கு

உருவ அளவு 64-ஐக் கொண்ட ஒரு சமவாய்ப்புக் கூறின் சராசரி 2·60 எனில், கூறு பிறந்த பரவல் சராசரிக்கான 90% நம்பிக்கை இடைவெளியைப் பெறுக.

(பரவல் திட்ட விலக்க மதிப்பு 0·32 எனக் கொள்க.)

முறை

இங்கு,

கூறு சராசரி $\bar{X} = 2{\cdot}60$

கூறு உருவ அளவு $n = 64$

பரவல் திட்டவிலக்கம் $\sigma = 0{\cdot}32$

$1 - \alpha = 0{\cdot}90$

ஆகிய கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களிலிருந்து

$$D(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0{\cdot}32}{\sqrt{64}} = 0{\cdot}04$$

$$K_{\frac{\alpha}{2}} = K_{0{\cdot}05} = 1{\cdot}65$$

$$a_1 = \bar{X} - K_{0{\cdot}05}\, D(\bar{X}) = 2{\cdot}60 - 1{\cdot}65\,(0{\cdot}04)$$
$$= 2{\cdot}534$$

$$a_2 = \bar{X} + K_{0 \cdot 05}\ D(\bar{X}) = 2{\cdot}60 + 1{\cdot}65\ (0{\cdot}04)$$
$$= 2{\cdot}666$$

ஆகியவைகளைப் பெறுகிறோம்.

இப்போது, பரவல் சராசரி μ-க்கான 90% நம்பிக்கை இடைவெளி

$$2{\cdot}534 \leq \mu \leq 2{\cdot}666$$

ஆகும் என உய்த்துணருகிறோம்.

திட்ட விலக்கத்திற்கான நம்பிக்கை இடைவெளி

ஒரு ராண்டம் மாறி X-ன் பரவல் திட்டவிலக்கம் σ என்க. X பரவலிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட சமவாய்ப்புக் கூறு $X_1, X_2, \ldots, X_n$ மாறிகளைக் கொண்டு σ-க்கு $(1-\alpha)$ சதவீத நம்பிக்கை இடைவெளியை அமைப்பதுபற்றி இப்போது காண்போம்.

கூறு மாறிகள் $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ஆகியவைகளின் திட்டவிலக்கம் S-ன் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு σ-ஆக அமைவதால், பரவல் திட்ட விலக்கம் σ-வை மதிப்பிட ஏற்றதான கூறு அளவை S எனக் கொள்கிறோம்.

கூறு திட்ட விலக்கம் S-ன் அணுகு கோடு பரவலானது இயல்நிலைப் பரவலாக அமைவதால், பரவல் திட்டவிலக்கம் σ-க்கு அமைக்கும் $(1-\alpha)$ சதவீத ராண்டம் இடைவெளி

$$S - K_{\frac{\alpha}{2}}\ D(S) \leq \sigma \leq S + K_{\frac{\alpha}{2}}\ D(S)$$

ஆகும்.

இங்கு $D(S) = S$-ன் திட்டப்பிழை $= \dfrac{\sigma}{\sqrt{2n}} \simeq \dfrac{S}{\sqrt{2n}}$ ஆகும்.

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ ஆகிய கூறு மாறிகளின் கண்டறிந்த மதிப்புகள் முறையே $x_1, x_2, \ldots, x_n$ எனில், கூறு திட்டவிலக்கம் S-ன் மதிப்பை s எனக் குறிப்பிட்டு, σ-க்கான $(1-\alpha)$ சதவீத நம்பிக்கை இடைவெளி

$$s - K_{\frac{\alpha}{2}}\ \frac{s}{\sqrt{2n}} \leq \sigma \leq s + K_{\frac{\alpha}{2}}\ \frac{s}{\sqrt{2n}}$$

ஆக அமையும் என்கிறோம்.

கணக்கு

128 உருவ அளவுகொண்ட ஒரு சமவாய்ப்புக் கூறின் திட்ட விலக்கம் 3·2" எனில், கூறு பிறந்த பரவல் திட்ட விலக்கத்திற்கான 99% நம்பிக்கை இடைவெளியைப் பெறுக.

இங்கு,

கூறு திட்ட விலக்கம் $S = 3{\cdot}2''$

கூறு உருவ அளவு $n = 128$

$1 - \alpha = 0{\cdot}99$

ஆகிய கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களிலிருந்து,

$$D(S) = \frac{S}{\sqrt{2n}} = \frac{3{\cdot}2}{\sqrt{256}} = 0{\cdot}2$$

$$K_{\frac{\alpha}{2}} = K_{0{\cdot}005} = 2{\cdot}58$$

$$\begin{aligned} a_1 &= S - K_{0{\cdot}005}\, D(S) \\ &= 3{\cdot}2'' - 2{\cdot}58 \times 0{\cdot}2 \\ &= 3{\cdot}2 - 0{\cdot}516 \\ &= 2{\cdot}684'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2 &= S + K_{0{\cdot}005}\, D(S) \\ &= 3{\cdot}2'' + 2{\cdot}58 \times 0{\cdot}2 \\ &= 3{\cdot}716'' \end{aligned}$$

ஆகியவைகளைப் பெறுகிறோம்.

இப்போது, முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கம் σ-க்கான 99% நம்பிக்கை இடைவெளி

$$2{\cdot}684'' \leq \sigma \leq 3{\cdot}716''$$

ஆகும் என உய்த்துணருகிறோம்.

விகிதத்திற்கான நம்பிக்கை இடைவெளி

ஒரு ராண்டம் மாறி X-ன் பரவல் விகிதம் P என்க. X பரவலிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட சமவாய்ப்புக் கூறு $X_1, X_2, \ldots, X_n$ மாறிகளைக் கொண்டு P-க்கு $(1 - \alpha)$ சதவீத நம்பிக்கை இடைவெளியை அமைப்பதுபற்றி இப்போது காண்போம்.

கூறு மாறிகள் $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ஆகியவைகளின் வாயிலாகப் பெறும் கூறு விகிதம் π-ன் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு P-ஆக அமை

வதால், பரவல் விகிதம் P-ஐ மதிப்பிட ஏற்றதான கூறு அளவை π எனக் கொள்கிறோம்.

கூறு விகிதம் π-ன் அணுகுகோடு பரவலானது இயல்நிலைப் பரவலாக அமைவதால், பரவல் விகிதம் P-க்கு அமைக்கும் $(1-\alpha)$ சதவீத ராண்டம் இடைவெளி

$$\pi - K_{\frac{\alpha}{2}} D(\pi) \leq P \leq \pi + K_{\frac{\alpha}{2}} D(\pi)$$

ஆகும்.

$$\text{இங்கு } D(\pi) = \pi\text{-ன் திட்டப்பிழை} = \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}} \text{ ஆகும்.}$$

கூறு விகிதம் π-ன் மதிப்பை p எனக் குறிப்பிட்டு, P-க்கான $(1-\alpha)$ சதவீத நம்பிக்கை இடைவெளி

$$p - K_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq P \leq p + K_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

ஆக அமையும் என்கிறோம்.

கணக்கு

ஒரு மாம்பழக் குவியலிலிருந்து 500 மாம்பழங்களைத் தேர்ந்தெடுத்ததில் 65 பழங்கள் அழுகியவைகளாகக் காணப்பட்டன எனில், அக் குவியலில் அழுகிய பழங்களின் விகிதத்தின் 95% நம்பிக்கை இடைவெளியைப் பெறுக.

முறை

இங்கு,

கூறு விகிதம் $\pi = \frac{65}{500} = 0{\cdot}13$

கூறு உருவ அளவு $n = 500$

$1 - \alpha = 0{\cdot}95$

ஆகிய கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களிலிருந்து

$$D(\pi) = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{500}} = \sqrt{\frac{0{\cdot}13(1-0{\cdot}13)}{500}} = 0{\cdot}015$$

$$K_{\frac{\alpha}{2}} = K_{0{\cdot}025} = 1{\cdot}96$$

$$a_1 = \pi - K_{0 \cdot 025} D(\pi)$$
$$= 0{\cdot}13 - 1{\cdot}96 \times 0{\cdot}015$$
$$= 0{\cdot}13 - 0{\cdot}0294$$
$$= 0{\cdot}1006$$

$$a_2 = \pi + K_{0 \cdot 025} D(\pi)$$
$$= \pi + 1{\cdot}96 \times 0{\cdot}015$$
$$= 0{\cdot}13 + 0{\cdot}0294$$
$$= 0{\cdot}1594$$

ஆகியவைகளைப் பெறுகிறோம்.

இப்போது முழுமைத் தொகுதி விகிதம் P-க்கான 95% நம்பிக்கை இடைவெளி

$$0{\cdot}1006 \leq P \leq 0{\cdot}1594$$

ஆகும் என உய்த்துணருகிறோம்.

ஒட்டுறவுக் கெழுவுக்கான நம்பிக்கை இடைவெளி

இரு இணைந்த மாறி X, Y-களின் ஒட்டுறவுக்கெழு ρ என்க. (X, Y) இணைப் பரவலிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட சமவாய்ப்புக் கூறு (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), ..., (X_n, Y_n) மாறிகளைக் கொண்டு ρ-க்கு $(1-\alpha)$ சதவீத நம்பிக்கை இடைவெளியை அமைப்பதைப் பற்றிக் காண்போம்.

கூறு மாறிகள் (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), ..., (X_n, Y_n) ஆகியவைகளின் ஒட்டுறவுக் கெழு R-ன் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு ρ ஆக அமைவதால், ஒட்டுறவுக்கெழு ρ-ஐ மதிப்பிட ஏற்றதான கூறு அளவை R எனக் கொள்கிறோம்.

கூறு ஒட்டுறவுக்கெழு R-ன் அணுகுகோடு பரவலானது இயல்நிலைப் பரவலாக அமைவதால் ஒட்டுறவுக்கெழு ρ-க்கு அமைக்கும் $(1-\alpha)$ சதவீத ராண்டம் இடைவெளி

$$R - K_{\frac{\alpha}{2}} D(R) \leq \rho \leq R + K_{\frac{\alpha}{2}} D(R) \text{ ஆகும்.}$$

இங்கு $D(R) = R$-ன் திட்டப்பிழை

$$= \frac{1-\rho^2}{\sqrt{n}}$$

ஆகும்.

கூறு ஒட்டுறவுக்கெழு R-ன் மதிப்பை r எனக் குறிப்பிட்டு ρ-க்கான $(1-\alpha)$ சதவீத நம்பிக்கை இடைவெளி

$$r - K_{\frac{\alpha}{2}} \frac{1-r^2}{\sqrt{n}} \leq \rho \leq r + K_{\frac{\alpha}{2}} \frac{1-r^2}{\sqrt{n}}$$

ஆக அமையும் என்கிறோம்.

கணக்கு

1600 உருவ அளவு கொண்ட சமவாய்ப்புக் கூறின் ஒட்டுறவுக் கெழு 0·2 எனில், இக் கூறு பிறந்த முழுமைத் தொகுதியின் ஒட்டுறவுக் கெழுவின் 95% நம்பிக்கை இடைவெளியைக் காண்க.

முறை

இங்கு,

கூறு உருவ அளவு $n = 1600$

கூறின் ஒட்டுறவுக்கெழு $r = 0{\cdot}2$

$1 - \alpha = 0{\cdot}95$

ஆகிய கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களிலிருந்து

$$D(r) = \frac{1-r^2}{\sqrt{n-1}} = 0{\cdot}024$$

$$K_{\frac{\alpha}{2}} = K_{0\cdot025} = 1{\cdot}96$$

$$\begin{aligned} a_1 &= r - K_{0\cdot025}\, D(r) \\ &= 0{\cdot}2 - 1{\cdot}96 \times 0{\cdot}024 \\ &= 0{\cdot}2 - 0{\cdot}047 \\ &= 0{\cdot}153 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2 &= r + K_{0\cdot025}\, D(r) \\ &= 0{\cdot}247 \end{aligned}$$

ஆகியவைகளைப் பெறுகிறோம்.

இப்போது, முழுமைத்தொகுதி ஒட்டுறவுக்கெழு ρ-க்கான 95% நம்பிக்கை இடைவெளி

$$0{\cdot}153 \leq \rho \leq 0{\cdot}247$$

ஆகும் என உய்த்துணருகிறோம்.

இரு சராசரிகளின் வேறுபாட்டுக்கான நம்பிக்கை இடைவெளி

இரு ராண்டம் மாறிகள் X, Y ஆகியவைகளின் பரவல் சராசரிகள் μ_1, μ_2 என்க. X மாறியின் பரவலிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப் பட்ட சமவாய்ப்புக் கூறு $X_1, X_2, \ldots, X_m$, Y மாறியின் பரவலிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட சமவாய்ப்புக் கூறு $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ ஆகியவைகளைக் கொண்டு $(\mu_1 - \mu_2)$-க்கு $(1-\alpha)$ சதவீத நம்பிக்கை இடைவெளியை அமைப்பதைப் பற்றிக் காண்போம்.

$X_1, X_2, \ldots, X_m$ ஆகிய மாறிகளின் சராசரி $\bar{X}$, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ ஆகிய மாறிகளின் சராசரி $\bar{Y}$ ஆகிய இரு கூறு சராசரிகளின் வேறுபாடு $(\bar{X}-\bar{Y})$-ன் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு $(\mu_1 - \mu_2)$ ஆக அமைவதால் இரு பரவல் சராசரிகளின் வேறுபாடு $(\mu_1 - \mu_2)$ ஐ மதிப்பிட ஏற்றதான கூறு அளவை $(\bar{X}-\bar{Y})$ எனக் கொள்கிறோம்.

கூறு சராசரிகளின் வேறுபாடான, $(\bar{X}-\bar{Y})$ன் அணுகு கோடு பரவலானது இயல்நிலைப் பரவலாக அமைவதால், பரவல் சராசரிகளின் வேறுபாடு $(\mu_1 - \mu_2)$-க்கு அமைக்கும் $(1-\alpha)$ சதவீத ராண்டம் இடைவெளி

$$(\bar{X}-\bar{Y}) - K_{\frac{\alpha}{2}} D(\bar{X}-\bar{Y}) \leq (\mu_1 - \mu_2) = (\bar{X}-\bar{Y}) + K_{\frac{\alpha}{2}} D(\bar{X}-Y) \text{ ஆகும்.}$$

$$\text{இங்கு } D(\bar{X}-\bar{Y}) = (X-\bar{Y})\text{-ன் திட்டப் பிழை} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}$$

$\sigma_1^2 = X$ பரவலின் மாறுபாடு.

$\sigma_2^2 = Y$ பரவலின் மாறுபாடு.

கூறு சராசரி $\bar{X}$-ன் கண்டறிந்த மதிப்பை $\bar{x}$ எனவும், கூறு சராசரி $\bar{Y}$-ன் கண்டறிந்த மதிப்பை $\bar{y}$ எனவும் குறிப்பிட்டு, $(\mu_1 - \mu_2)$-க்கான $(1-\alpha)$ சதவீத நம்பிக்கை இடைவெளி

$$(\bar{x}-\bar{y}) - K_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}} \leq (\mu_1 - \mu_2) \leq (\bar{x}-\bar{y}) + K_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}$$

ஆக அமையும் என்கிறோம்.

பரவல் திட்ட விலக்கங்கள் σ_1, σ_2 ஆகியவைகளின் மதிப்புத் தெரியாதாயின் கூறுதிட்ட விலக்க மதிப்புகளான s_1, s_2 ஆகியவைகளை முறையே σ_1, σ_2 ஆகியவைகளுக்குப் பிரதியிடுகிறோம்.

கணக்கு

ஒரு குறிப்பிட்ட நுண்ணறிவுச் சோதனையொன்று ஒரு பெரிய மாணவ மாணவியர் குழுவிற்கு நடத்தப்பட்டதில் அதன் திட்ட விலக்கம் மதிப்பு 30 ஆகக் கணக்கிடப்பட்டது. இந்தச் சோதனை 200 மாணவர்களுக்கு நடத்தப்பட்டதில் அவர்கள் சராசரி 200 மதிப்புகளும், 150 மாணவிகளுக்கு நடத்தப்பட்டதில் அவர்கள் 135 மதிப்புகளும் பெற்றனர் எனில், இவ்விரு குழுக்களும் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட முழுமைத் தொகுதியில் மாணவர்களின் சராசரி மதிப்புக்கும், மாணவிகளின் சராசரி மதிப்புக்குமிடையே உள்ள வேறுபாட்டின் 90% நம்பிக்கை இடைவெளியைப் பெறுக.

முறை

இங்கு,

முதல் கூறின் சராசரி	$\bar{X} = 200$
இரண்டாவது கூறின் சராசரி	$\bar{Y} = 135$
முதல் கூறின் உருவ அளவு	$n_1 = 200$
இரண்டாவது கூறின் உருவ அளவு	$n_2 = 150$
முழுமைத் தொகுதியின் திட்டவிலக்கம்	$\sigma = 30$
	$1 - a = 0{\cdot}90$

ஆகிய கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களிலிருந்து

$$D(\bar{X}-\bar{Y}) = \sigma\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$

$$= 30\sqrt{\frac{1}{200} = \frac{1}{150}}$$

$$= 3{\cdot}24$$

$$K_{\frac{a}{2}} = K_{0\cdot05} = 1{\cdot}65$$

$$a_1 = (\bar{X}-\bar{Y}) - K_{0\cdot05}\, D(\bar{X}-\bar{Y})$$

$$= 65 - 1{\cdot}65 \times 3{\cdot}24$$

$$= 65 - 5{\cdot}3460$$

$$= 59{\cdot}6540$$

$$a_2 = (\bar{X}-\bar{Y}) + K_{0.05}\, D\,(\bar{X}-\bar{Y})$$
$$= 65 + 5.3460$$
$$= 70.3460$$

ஆகியவைகளைப் பெறுகிறோம்.

இப்போது பரவல் சராசரிகளின் வேறுபாட்டு $(\mu_1 - \mu_2)$-க்கான 90% நம்பிக்கை இடைவெளி

$$59.6940 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq 70.3460$$

ஆகும் என உய்த்துணருகிறோம்.

இரு திட்ட விலக்கங்களின் வேறுபாட்டுக்கான நம்பிக்கை இடைவெளி

இரு ராண்டம் மாறிகள் X, Y ஆகியவைகளின் பரவல் திட்ட விலக்கங்கள் σ_1, σ_2 என்க. X மாறியின் பரவலிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட சமவாய்ப்புக் கூறு $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_m$, Y மாறியின் பரவலிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட சமவாய்ப்புக் கூறு $Y_1, Y_2, \ldots\ldots, Y_n$ ஆகியவைகளைக் கொண்டு $(\sigma_1 - \sigma_2)$-க்கு $(1 - \alpha)$ சதவீத நம்பிக்கை இடைவெளியை அமைப்பதைப் பற்றிக் காண்போம்.

$X_1, X_2, \ldots\ldots, X_m$ ஆகிய மாறிகளின் திட்டவிலக்கம் S_1, $Y_1, Y_2, \ldots\ldots, Y_n$ ஆகிய மாறிகளின் திட்ட விலக்கம் S_2 ஆகிய இரு கூறு திட்ட விலக்கங்களின் வேறுபாடு $(S_1 - S_2)$-ன் எதிர் பார்க்கும் மதிப்பு $(\sigma_1 - \sigma_2)$ ஆக அமைவதால், இரு பரவல் திட்ட விலக்கங்களின் வேறுபாடு $(\sigma_1 - \sigma_2)$ஐ மதிப்பிட ஏற்றதான கூறு அளவை $(S_1 - S_2)$ எனக் கூறுகிறோம்.

கூறு திட்ட விலக்கங்களின் வேறுபாடான $(S_1 - S_2)$-ன் அணுகுகோடு பரவலானது இயல்நிலைப் பரவலாக அமைவதால், பரவல் திட்டவிலக்கங்களின் வேறுபாடு $(\sigma_1 - \sigma_2)$-க்கு அமைக்கும் $(1 - \alpha)$ சதவீத ராண்டம் இடைவெளி

$$(S_1-S_2)-K_{\frac{\alpha}{2}}\, D(S_1-S_2) \leq (\sigma_1-\sigma_2) \leq (S_1-S_2) + K_{\frac{\alpha}{2}}\, D(S_1-S_2)$$

ஆகும். இங்கு,

$$D\,(S_1 - S_2) = (S_1 - S_2)\text{-ன் திட்டப் பிழை}$$
$$= \sqrt{\frac{S_1^2}{2m} + \frac{S_2^2}{2n}}$$

கூறு திட்ட விலக்கம் S_1-ன் கண்டறிந்த மதிப்பை s_1 எனவும், கூறு திட்ட விலக்கம் S_2-ன் கண்டறிந்த மதிப்பை s_2 எனவும் குறிப்பிட்டு, $(\sigma_1 - \sigma_2)$-க்கான $(1-\alpha)$ சதவீத நம்பிக்கை இடைவெளி,

$$(s_1 - s_2) - K_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{s_1^2}{2m} + \frac{s_2^2}{2n}} \leq (\sigma_1 - \sigma_2) \leq (s_1 - s_2) + K_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{s_1^2}{2m} + \frac{s_2^2}{2n}}$$

ஆக அமையும் என்கிறோம்.

கணக்கு

கருத்துநிலை வாதச் சோதனையில் (Abstract reasoning test) 6ஆவது வகுப்பு மாணவர்களும், மாணவியரும் பெற்ற மதிப்பெண்களின் விவரம் வருமாறு :

	மாணவர்கள்	மாணவிகள்
கூறின் உருவ அளவு	90	100
கூறின் திட்ட விலக்கம்	11	7

இக் கூறுகள் பிறந்த முழுமைத் தொகுதிகளின் திட்ட விலக்க மதிப்புகளின் வேறுபாட்டிற்கான 95% நம்பிக்கை இடைவெளியைக் காண்க.

இங்கு,

$$S_1 = 11, \quad S_2 = 7$$
$$n_1 = 90, \quad n_2 = 100$$
$$1 - \alpha = 0.95$$

ஆகிய விவரங்களிலிருந்து

$$D(S_1 - S_2) = \sqrt{\frac{S_1^2}{2n_1} + \frac{S_2^2}{2n_2}}$$
$$= \sqrt{\frac{11^2}{2 \times 90} + \frac{7^2}{2 \times 100}}$$
$$= 0.96$$

$$K_{\frac{\alpha}{2}} = K_{0.025} = 1.96$$

$$a_1 = (S_1 - S_2) - K_{0\cdot025}\, D\,(S_1 - S_2)$$
$$= 4 - 1\cdot96 \times 0\cdot96$$
$$= 4 - 1\cdot88$$
$$= 2\cdot12$$

$$a_2 = (S_1 - S_2) + K_{0\cdot025}\, D\,(S_1 - S_2)$$
$$= 4 + 1\cdot96 \times 0\cdot96$$
$$= 5\cdot88$$

ஆகியவைகளைப் பெறுகிறோம்.

இப்போது முழுமைத் தொகுதி திட்ட விலக்கங்களின் வேறுபாடு $(\sigma_1 - \sigma_2)$-க்கான 95% நம்பிக்கை இடைவெளி

$$2\cdot12 \leq (\sigma_1 - \sigma_2) \leq 5\cdot88$$

ஆகும் என உய்த்துணருகிறோம்.

இரு ராண்டம் மாறிகள் X, Y ஆகியவைகளின் பரவல் விகிதங்கள் முறையே P_1, P_2 என்க. X பரவலிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட சமவாய்ப்புக் கூறு $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_{n_1}$, Y பரவலிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட சமவாய்ப்பு க்கூறு $Y_1, Y_2, \ldots\ldots, Y_{n_2}$ ஆகியவைகளைக் கொண்டு $(P_1 - P_2)$-க்கு $(1 - a)$ சதவீத நம்பிக்கை இடைவெளி அமைப்பதைப்பற்றிக் காண்போம்.

$X_1, X_2, \ldots\ldots, X_{n_1}$ ஆகியவைகளின் வாயிலாகப் பெறும் கூறு விகிதம் π_1, $Y_1, Y_2, \ldots\ldots, Y_{n_2}$ ஆகியவைகளின் வாயிலாகப் பெறும் கூறு விகிதம் π_2 ஆகியவைகளின் வேறுபாடு $(\pi_1 - \pi_2)$-ன் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு $(P_1 - P_2)$ ஆக அமைவதால் இரு பரவல் விகிதங்களின் வேறுபாடு $(P_1 - P_2)$-ஐ மதிப்பிட ஏற்றதான கூறு அளவை $(\pi_1 - \pi_2)$ எனக் கொள்கிறோம்.

கூறு விகிதங்களின் வேறுபாடான $(\pi_1 - \pi_2)$-ன் அணுகு கோடு பரவலானது இயல்நிலைப் பரவலாக அமைவதால், பரவல் விகிதங்களின் வேறுபாடு $(P_1 - P_2)$-க்கு அமைக்கும் $(1 - a)$ சதவீத ராண்டம் இடைவெளி

$$(\pi_1 - \pi_2) - K_{\frac{a}{2}}\, D\,(\pi_1 - \pi_2) < (P_1 - P_2) < (\pi_1 - \pi_2) + K_{\frac{a}{2}}\, D\,(\pi_1 - \pi_2)$$ ஆகும்.

இங்கு $D(\pi_1 - \pi_2) = (\pi_1 - \pi_2)$-ன் திட்டப்பிழை

$$= \sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2}}$$

P_1, P_2 ஆகியவைகளின் மதிப்புகள் தெரியாவாதலால்

$$D(\pi_1 - \pi_2) = \sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}}$$

எனக் கொள்கிறோம்.

கூறு விகிதம் π_1-ன் கண்டறிந்த மதிப்பை p_1 எனவும், கூறு விகிதம் π_2-ன் கண்டறிந்த மதிப்பை p_2 எனவும் குறிப்பிட்டு, $(P_1 - P_2)$-க்கான $(1-\alpha)$ சதவீத நம்பிக்கை இடைவெளி

$$(p_1 - p_2) - K_{\frac{\alpha}{2}} G(p_1, p_2) \leq (P_1 - P_2) \leq (p_1 - p_2) + K_{\frac{\alpha}{2}} G(p_1, p_2)$$ ஆகும்.

இங்கு $G(p_1, p_2) = \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}$ ஆகும்.

கணக்கு

ஓர் அளவெடுப்பின்போது, A எனும் நகரத்திலிருந்து சம வாய்ப்புக் கூறு முறையில் 1,000 நபர்களைத் தேர்ந்தெடுத்ததில், 500 பேர் அரிசி உண்பவர்களாகவும், B எனும் நகரத்திலிருந்து எடுக்கப்பட்ட 800 நபர்களில் 320 பேர் அரிசி உண்பவர்களாகவும் கணக்கெடுக்கப்பட்டது. இவ் விவரங்களைக் கொண்டு A, B நகரங்களில் அரிசி உண்பவர்களின் விகித மதிப்புகளின் வேறுபாட்டிற்கான 95% நம்பிக்கை இடைவெளியைக் காண்க :

முறை

A நகரத்தில் அரிசி உண்பவர்களின் விகித மதிப்பு $\left.\right\}$ $p_1 = \frac{500}{1000} = 0{\cdot}5$

B நகரத்தில் அரிசி உண்பவர்களின் விகித மதிப்பு $\left.\right\}$ $p_2 = \frac{320}{800} = 0{\cdot}4$

கூறின் உருவ அளவுகள் $n_1 = 1{,}000$, $n_2 = 800$

நம்பிக்கைக் கெழு $= 1 - \alpha = 0{\cdot}95$

ஆகிய கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களிலிருந்து

$$G(p_1, p_2) = \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}$$

$$= \sqrt{\frac{0{\cdot}25}{1000} + \frac{0{\cdot}24}{800}} = \mathbf{0{\cdot}0235}$$

$$K_{\frac{\alpha}{2}} = K_{0{\cdot}025} = 1{\cdot}96$$

$$a_1 = (p_1 - p_2) - K_{0{\cdot}025}\, G(p_1, p_2)$$
$$= 0{\cdot}1 - 1{\cdot}96 \times 0{\cdot}0235$$
$$= 0{\cdot}05394$$
$$a_2 = (p_1 - p_2) + K_{0{\cdot}025}\, G(p_1, p_2)$$
$$= \mathbf{0{\cdot}14606}$$

ஆகியவைகளைப் பெறுகிறோம்.

இப்போது முழுமைத் தொகுதிகளின் விகித மதிப்புகளின் வேறுபாட்டு $(p_1 - p_2)$-க்கான 95% நம்பிக்கை இடைவெளி

$$0{\cdot}054 \le (p_1 - p_2) \le 0{\cdot}146$$

ஆகும் என உய்த்துணருகிறோம்.

சராசரிக்கான சோதனை

ஒரு ராண்டம் மாறி X-ன் பரவல் சராசரி μ என்க. X பரவலிலிருந்து பெற்ற சமவாய்ப்புக் கூறு $X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, X_n$ மாறிகள் வாயிலாக, பரவல் சராசரி μ-ன் மதிப்பு நிலையெண் μ_0 என முடிவு கொள்ளலாமா என்பதை α சதவீத மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்வதைப் பற்றி இப்போது காண்போம்.

முதலில் பரவல் சராசரி $\mu = \mu_0$ எனும் சோதனை எடுகோளையும் $\mu > \mu_0$ எனும் மாற்று எடுகோளையும் அமைத்துக் கொள்வோம். அடுத்து

கூறு சராசரி $= \overline{X}$

கூறு உருவ அளவு $= n$

பரவல் திட்ட விலக்கம் $= \sigma$

ஆகியவைகளைச் சார்ந்துள்ள கூறு அளவை Z-ஐ

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{D(\bar{x})} = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

எடுத்துக் கொள்வோம்.

கூறு மாறிகளின் கண்டறிந்த மதிப்புகள் வாயிலாகக் கூறு சராசரியின் மதிப்பு $\overline{X}$-ஐக் கணக்கிட்டு,அதையும் μ_0, σ, n ஆகியவை களின் மதிப்புகளையும் கூறு அளவை Z-ல் பிரதியிட்டு அதன் மதிப் பைப் பெறுகிறோம்.

மாற்று எடுகோளின்கீழ் $\mu > \mu_0$ என அமைவதாலும் மிகைத்தன்மை மட்டம் $\alpha\%$ என்பதாலும், கூறு அளவையின் அணுகு கோடு பரவல் திட்ட இயல்நிலைப் பரவலாவதாலும், சோதனைக்கு ஏற்றதான தீர்வு கட்டமான வெளி w-ஐ,

$$w = \{ x : K_{\alpha} \leq x < \infty \}$$

ஆக எடுத்துக் கொள்கிறோம்.

இப்போது, கூறு அளவையின் மதிப்பு, தீர்வு கட்டமான வெளியில் உளளடங்கியிருப்பின், சூனிய எடுகோள் மறுக்கத் தக்க தெனவும் உய்த்துணருகிறோம்.

மாற்று எடுகோளின் கீழ் $\mu < \mu_0$ என அமைப்போமெனில் சோதனைக்கு ஏற்றதான தீர்வு கட்டமான வெளி w-ஐ

$$w = \{ x : -\infty < x \leq -K_{\alpha} \}$$

எனவும், மாற்று எடுகோளின்கீழ் $\mu \neq \mu_0$ என அமைப்போ மெனில், சோதனைக்கு ஏற்றதான தீர்வுகட்டமான வெளி w-ஐ

$$w = \left\{ x : -\infty < x \leq -K_{\frac{\alpha}{2}} \right\} \cup \left\{ x : K_{\frac{\alpha}{2}} \leq x < \infty \right\}$$

எனவும் எடுத்துக்கொண்டு உய்த்துணருகிறோம்.

பரவல் திட்ட விலக்கம் σ-ன் மதிப்பு தெரியாது போயின், கூறு திட்ட விலக்கம் s-ன் மதிப்பை σ-ன் மதிப்பாகக் கொள்கிறோம்.

கணக்கு

ஓர் ஊரில் உள்ள 25 வயதுடைய நபர்களின் குழுவிலிருந்து 400 பேர் கொண்ட கூறு ஒன்று தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டு அவர்கள் உயர மதிப்புகள் (சென்டிமீட்டர்களில்) சேகரிக்கப்பட்டன. கூறின் சராசரி 162 செ. மீ. எனில் முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி 165 செ. மீ. எனக் கொள்ளலாமா என்பதை 1% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்க. முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கம் 12 செ. மீ. எனக் கொள்க.

முறை

ஊரில் உள்ள 25 வயதுடைய நபர்கள் அடங்கிய முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி μ எனவும், திட்டவிலக்கம் σ எனவும் கொள்வோம். சூனிய எடுகோளின் கீழ் $\mu = 165$ எனவும், மாற்று எடுகோளின் கீழ் $\mu \neq 165$ எனவும் கொள்வோம்.

இப்போது,

கூறு உருவ அளவு $n = 400$
கூறு சராசரி $\bar{X} = 162$

ஆகியவைகளைக் கொண்டு சோதனைக்கான கூறு அளவை Z-ன்

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

$$= \frac{162 - 165}{12/\sqrt{400}}$$

$$= -5$$

மதிப்பைப் பெறுகிறோம்.

மாற்று எடுகோளின்கீழ் $\mu \neq 165$ எனவும், மிகைத்தன்மை மட்டம் 1% எனவும் கொள்வதால், சோதனைக்கான தீர்வு கட்டமான வெளி

$$w = \{x : -\infty < x \leq -2{\cdot}58\} \cup \{x : 2{\cdot}58 \leq x < \infty\}$$

ஆகும்.

கூறு அளவை Z-ன் கண்டறிந்த மதிப்பு, -5 ஆனது தீர்வு கட்டமான வெளியில் உள்ளடங்கியிருப்பதால் சூனிய எடுகோள் மறுக்கத்தக்கது என உய்த்துணருகிறோம். ஆகவே, கொடுக்கப்பட்ட கூறு விவரங்களிலிருந்து அவ்வூரிலுள்ள 25 வயதுடைய நபர்களின் சராசரி உயரம் 165 செ. மீ. எனக் கொள்ளலாகாது என 1% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் உய்த்துணருகிறோம்.

கணக்கு

ஒரு நிறுவனம், அது தயாரிக்கும் மின் விளக்குகள் சராசரியாக 1200 மணிகள் எரியுமெனக் கூறுகிறது. அந் நிறுவனம் தயாரித்த 100 மின் விளக்குகள் கொண்ட ஒரு கூறின் சராசரி எரியும் நேரம் 1178 மணிகள், திட்ட விலக்கம் 180 மணிகள் ஆகிய கூறு விவரங்களைப் பெற்ற ஒருவர் 'நிறுவனம் தயாரித்த மின் விளக்குகள் முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி 1200 மணிகளுக்குக் குறைவாக இருக்குமோ' என ஐயம் கொள்கிறார். இங்ஙனம்

அவர் ஐயப்படுவது சரிதானா என 5 சதவீத மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்க.

முறை

நிறுவனம் தயாரித்த மின் விளக்குகள் முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி எரியும் நேரத்தை μ எனவும், திட்ட விலக்கத்தை σ எனவும் குறிப்பிடுவோம்.

சூனிய எடுகோளின் கீழ் $\mu = \mu_0 = 1200$ எனவும்,

மாற்று எடுகோளின் கீழ் $\mu < 1200$ எனவும்

அமைத்துக் கொள்வோம்.

கூறு உருவ அளவு $n = 100$

கூறு சராசரி $\bar{X} = 1178$

கூறு திட்ட விலக்கம் $S = 180$

ஆகியவைகளைக் கொண்டு, சோதனைக்கான Z-ன்

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_2}{\sigma/\sqrt{n}}$$

$$= \frac{1178 - 1200}{180/\sqrt{100}}$$

$$= -1{\cdot}22$$

மதிப்பைப் பெறுகிறோம்.

மாற்று எடுகோளின் கீழ் $\mu < 1200$ எனவும், மிகைத்தன்மை மட்டம் 5% எனவும் கொள்வதால், சோதனைக்கான தீர்வு கட்டமான வெளி

$$w = \{ x : -\infty < x \leq -1{\cdot}65 \}$$

ஆகும்.

கூறு அளவை z-ன் மதிப்பு $-1{\cdot}22$ ஆனது தீர்வு கட்டமான வெளிக்குப் புறத்தே அமைவதால் சூனிய எடுகோள் மறுக்கத் தகாதது என உய்த்துணருகிறோம். ஆகவே கூறு விவரங்களிலிருந்து "நிறுவனம் தயாரித்த மின் விளக்குகள் முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி 1200 மணிகளுக்குக் குறைவாக இருக்குமோ" என ஐயப்படுவது சரியல்ல என 5% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் உய்த்துணருகிறோம்.

திட்ட விலக்கத்திற்கான சோதனை

ஒரு ராண்டம் மாறி X-ன் பரவல் திட்டவிலக்கம் σ என்க. X-ன் பரவலிலிருந்து பெற்ற சமவாய்ப்புக் கூறு $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ மாறிகள் வாயிலாகப் பரவல் திட்ட விலக்கம் σ-ன் மதிப்பு நிலையெண் σ_0 என முடிவு கொள்ளலாமா என்பதை α சதவீத மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்வதைப் பற்றி இப்போது காண்போம்.

முதலில், பரவல் திட்ட விலக்கம் $\sigma = \sigma_0$ எனும் சோதனை எடுகோளையும் $\sigma > \sigma_0$ எனும் மாற்று எடுகோளையும் அமைத்துக் கொள்வோம். அடுத்து

கூறு திட்ட விலக்கம் $= S$
கூறு உருவ அளவு $= n$
பரவல திட்ட விலக்கம் $= \sigma$

ஆகியவைகளைச் சார்ந்துள்ள கூறு அளவை Z-ஐ

$$Z = \frac{S - \sigma_0}{D(S)} = \frac{S - \sigma_0}{\sigma_0/\sqrt{2n}}$$

என எடுத்துக் கொள்வோம்.

கூறு மாறிகளின் கண்டறிந்த மதிப்புகள் வாயிலாகக் கூறு திட்ட விலக்கத்தின் மதிப்பு S-ஐக் கணக்கிட்டு, அதையும் σ_0, n ஆகியவைகளின் மதிப்புகளையும் கூறு அளவை Z-ல் பிரதியிட்டு அதன் மதிப்பைப் பெறுகிறோம்.

மாற்று எடுகோளின் கீழ் $\sigma > \sigma_0$ என அமைவதாலும் மிகைத் தன்மை மட்டம் $\alpha\%$ என்பதாலும், கூறு அளவையில் அணுகு கோடு பரவல் திட்ட இயல் நிலைப் பரவலாவதாலும், சோதனைக்கு ஏற்றதான தீர்வு கட்டமான வெளி w-ஐ

$$w = \{x : K_\alpha \leq x < \infty\}$$

ஆக எடுத்துக் கொள்கிறோம்.

இப்போது, கூறு அளவையின் மதிப்பு தீர்வு கட்டமான வெளியில் உள்ளடங்கியிருப்பின், சூனிய எடுகோள் மறுக்கத் தக்கதெனவும், அவ்வாறில்லையெனில், அது மறுக்கத் தகாததெனவும் உய்த்துணருகிறோம்.

மாற்று எடுகோளின் கீழ் $\sigma < \sigma_0$ என அமைப்போமெனில் சோதனைக்கு ஏற்றதான தீர்வுகட்டமான வெளி w-ஐ

$$w = \{x : -\infty < x \leq -K_\alpha\}$$

எனவும், மாற்று எடுகோளின் கீழ் $\sigma \neq \sigma_0$ என அமைப்போமெனில் சோதனைக்கு ஏற்றதான தீர்வு கட்டமான வெளி w-ஐ

$$w = \left\{ x : -\infty < x \leq -K_{\frac{\alpha}{2}} \right\} \cup \left\{ x : K_{\frac{\alpha}{2}} \leq x < \infty \right\}$$

எனவும் எடுத்துக் கொண்டு உய்த்துணருகிறோம்.

கணக்கு

ஒரு கடையில் நாளொன்றுக்கு விற்பனையான கோதுமையின் அளவு பற்றிய 72 நாட்களுக்கான விவரங்கள் சேகரிக்கப்பட்டன. இவ் விவரங்களின் திட்ட விலக்க மதிப்பு 22 கிலோ கிராம்கள் எனில், கோதுமை விற்பனைக்கான முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கத்தை 24 கிலோ கிராம்கள் எனக் கொள்ளலாமா என்பதை 1% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்க.

முறை

முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கத்தை σ எனக் கொள்வோம். சூனிய எடுகோளின் கீழ் $\sigma = \sigma_0 = 24$ எனவும், மாற்று எடுகோளின் கீழ் $\sigma \neq 24$ எனவும் அமைத்துக் கொள்வோம்.

இப்போது,

கூறு உருவ அளவு $n = 72$
கூறு திட்ட விலக்கம் $s = 32$

ஆகியவைகளைக் கொண்டு சோதனைக்கான கூறு அளவை Z-ன்

$$Z = \frac{S - \sigma}{\sigma/\sqrt{2n}}$$

$$= \frac{22 - 24}{24/\sqrt{144}}$$

$$= \frac{-2}{2} = -1$$

என்ற மதிப்பைப் பெறுகிறோம்.

மாற்று எடுகோளின் கீழ் $\sigma \neq 24$ எனவும், மிகைத் தன்மை மட்டம் 1% எனவும் கொள்வதால் சோதனைக்கான தீர்வு கட்டமான வெளி

$$w = \{ x : -\infty < x \leq -2{\cdot}58 \} \cup \{ x : 2{\cdot}58 \leq x < \infty \}$$

ஆகும்.

கூறு அளவை Z-ன் கண்டறிந்த மதிப்பு -1 ஆனது தீர்வு கட்டமான வெளியில் உள்ளடங்கி யிராததால் சூனிய எடுகோளை ஏற்றுக் கொள்ளத்தக்கது என உய்த்துணருகிறோம். ஆகவே, கொடுக்கப்பட்ட கூறு விவரங்களிலிருந்து முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கம் 24 கிலோ கிராம் எனக் கொள்ளலாம் என 1% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் உய்த்துணருகிறோம்.

கணக்கு

200 நபர்கள் கொண்ட ஒரு கூறின் திட்ட விலக்க உயரம் 3·4" எனக் கணக்கிடப்பட்டது. இக்கூறு பிறந்த முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கம் 3·2"க்கு அதிகமாக இருக்குமோ என ஐயம் கொள்ளப்படுகிறது. இங்ஙனம் அவர் ஐயப்படுவது சரி தானு என 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்க.

முறை

முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கத்தை σ எனக் கொள்வோம். சூனிய எடுகோளின் கீழ் $\sigma = \sigma_0 = 3{\cdot}2''$ எனவும், மாற்று எடுகோளின் கீழ் $\sigma > 3{\cdot}2$ எனவும் அமைத்துக் கொள்வோம்.

கூறு உருவ அளவு $n = 200$
கூறு திட்ட விலக்கம் $S = 3{\cdot}2''$

ஆகியவைகளைக் கொண்டு சோதனைக்கான கூறு அளவை Z-ன்

$$Z = \frac{S-\sigma}{\sigma / \sqrt{2n}}$$

$$= \frac{3{\cdot}4 - 3{\cdot}2}{3{\cdot}2 / \sqrt{400}}$$

$$= \frac{0{\cdot}2}{0{\cdot}16}$$

$$= 1{\cdot}25$$

மதிப்பைப் பெறுகிறோம்.

மாற்று எடுகோளின் கீழ் $\sigma > 3{\cdot}2$ எனவும், மிகைத்தன்மை மட்டம் 5% எனவும் கொள்வதால் சோதனைக்கான தீர்வு கட்டமான வெளி

$\omega = \{ x : 1{\cdot}65 \leq x < \infty \}$ ஆகும்.

கூறு அளவை Z-ன் மதிப்பு $1{\cdot}25$ தீர்வு கட்டமான வெளிக்குப் புறத்தே அமைவதால் சூனிய எடுகோள் மறுக்கத்தகாதது என உய்த்துணருகிறோம்.

ஆகவே, கூறு விவரங்களிலிருந்து, முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கம் 3·2"க்கு அதிகமாக இருக்குமோ என ஐயப்படுவது சரியல்ல என 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் உய்த்துணருகிறோம்.

விகிதத்திற்கான சோதனை

ஒரு ராண்டம் மாறி X-ன் பரவல் விகிதம் P என்க. X பரவலிலிருந்து பெற்ற சமவாய்ப்புக் கூறு $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ மாறிகள் வாயிலாக, பரவல் விகிதம் P-ன் மதிப்பு நிலையெண் P_0 என முடிவு கொள்ளலாமா என்பதை α சதவீத மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்வதைப் பற்றி இப்போது காண்போம்.

முதலில் பரவல் விகிதம் $P = P_0$ எனும் சூனிய எடுகோளையும், $P > P_0$ எனும் மாற்று எடுகோளையும் அமைத்துக் கொள்வோம்.

அடுத்து, கூறு விகிதம் $= \pi$

கூறு உருவ அளவு $= n$

ஆகியவைகளைச் சார்ந்துள்ள கூறு அளவை Z-ஐ

$$Z = \frac{\pi - P_0}{D(\pi)} = \frac{\pi - P_0}{\sqrt{\dfrac{P_0(1-P_0)}{n}}}$$

எடுத்துக் கொள்வோம்.

கூறு மாறிகளின் கண்டறிந்த மதிப்புக்கள் வாயிலாகக் கூறு விகிதத்தின் மதிப்பு π-ஐக் கணக்கிட்டு, அதையும், P_0, n ஆகியவைகளின் மதிப்புக்களையும் கூறு அளவை Z-ல் பிரதியிட்டு அதன் மதிப்பைப் பெறுகிறோம்.

மாற்று எடுகோளின் கீழ் $P > P_0$ என அமைவதாலும் மிகைத்தன்மை மட்டம் α% என்பதாலும், கூறு அளவையின் அணுகுகோடு பரவல் திட்ட இயல் நிலைப் பரவலாவதாலும், சோதனைக்கு ஏற்றதான தீர்வு கட்டமான வெளி ω-ஐ

$$\omega = \{ x : K_\alpha \leq x \leq \infty \}$$

ஆக எடுத்துக் கொள்கிறோம்.

இப்போது, கூறு அளவையின் மதிப்பு, தீர்வு கட்டமான வெளியில் உள்ளடங்கி இருப்பின், சூனிய எடுகோள் மறுக்கத்தக்கதெனவும், அவ்வாறு இல்லையெனில் அது மறுக்கத்தகாதெனவும் உய்த்துணருகிறோம்.

மாற்று எடுகோளின் கீழ் $P < P_0$ என அமைத்தால், சோதனைக்கு ஏற்றதான தீர்வு கட்டமான வெளி ω-ஐ,

$$\omega = \{ X : -\infty \leq x \leq -K_{\alpha} \}$$ எனவும்,

மாற்று எடுகோளின் கீழ் $P \neq P_0$ எனில், சோதனைக்கு ஏற்ற தீர்வு கட்டமான வெளி

$$\omega = \left\{ x : -\infty < x \leq K_{\frac{\alpha}{2}} \right\} \cup \left\{ x : K_{\frac{\alpha}{2}} \leq x < \infty \right\}$$

எனவும் கொள்கிறோம்.

கணக்கு

பல் வலியைப் போக்கும் மருந்து தயாரிக்கும் நிறுவனம் ஒன்று, அது தயாரிக்கும் மருந்தைப் பயன்படுத்தும்போது நூற்றுக்கு 80 பேர் குணமடைவர் என விளம்பரம் செய்கிறது. அந்நிறுவனம் தயாரித்த மருந்தினைப் பயன்படுத்திய 100 பேர்களில் 72 பேர் குணமடைந்தனர் எனில், அந்நிறுவனத்தின் விளம்பரம் ஏற்றுக் கொள்ளத்தக்கதா என 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்க.

முறை

முழுமைத் தொகுதியின் விகிதம் P எனக் கொள்வோம்.
சூனிய எடுகோளின் கீழ் $P = P_0 = 0{\cdot}80$ எனவும்
மாற்று எடுகோளின் கீழ் $P < 0{\cdot}80$ எனவும்
அமைத்துக் கொள்வோம்.

இப்போது,

கூறின் உருவ அளவு $n = 100$
கூறின் விகிதம் $\pi = 0{\cdot}72$
ஆகிய விவரங்களைக் கொண்டு கூறு அளவை Z-ன்

$$Z = \frac{\pi - P_0}{\sqrt{\dfrac{P_0(1-P_0)}{n}}}$$

$$= \frac{0{\cdot}72 - 0{\cdot}80}{\sqrt{\dfrac{0{\cdot}80(1-0{\cdot}80)}{100}}}$$

$$= -2$$

மதிப்பைப் பெறுகிறோம்.

மாற்று எடுகோளின் கீழ் $P < 0{\cdot}80$ எனவும், மிகைத் தன்மை மட்டம் 5% எனவும் அமைவதால் சோதனைக்கான தீர்வு கட்டமான வெளி

$$\omega = \{ x : \; -\infty < x \leq -1{\cdot}65 \}$$ ஆகும்.

கூறு அளவை Z-ன் கண்டறிந்த மதிப்பு -2 ஆனது தீர்வு கட்டமான வெளியில் உள்ளடங்கி இருப்பதால் சூனிய எடுகோள் மறுக்கத் தக்கது என உய்த்துணருகிறோம். ஆகவே, கொடுக்கப்பட்ட கூறு விவரங்களிலிருந்து அந்நிறுவனத்தின் விளம்பரம் ஏற்றுக் கொள்ளத் தக்கதல்ல என 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் உய்த்துணருகிறோம்.

இரு சராசரிகளின் வேறுபாட்டிற்கான சோதனை

இரு ராண்டம் மாறிகள் X, Y ஆகியவைகளின் பரவல் சராசரிகள் μ_1, μ_2 எனவும், திட்ட விலக்கங்கள் σ_1, σ_2 எனவும் கொள்வோம். X பரவலிலிருந்து பெற்ற சம வாய்ப்புக் கூறு மாறிகள் $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$, Y பரவலிலிருந்து பெற்ற சம வாய்ப்புக் கூறு மாறிகள் $y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n$ ஆகியவைகள் வாயிலாக இரு பரவல்களின் சராசரிகள் சமமாகுமா, அதாவது $\mu_1 = \mu_2$ எனக் கொள்ளலாமா என்பதை α% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்வது பற்றி இப்போது காண்போம்.

முதலில் X, Y மாறிகளின் பரவல் சராசரிகள் சமம். அதாவது $\mu_1 = \mu_2$ எனும் சூனிய எடுகோளையும், அதற்கு எதிராக $\mu_1 > \mu_2$ எனும் மாற்று எடுகோளையும் எடுத்துக் கொள்வோம்.

அடுத்து, கீழ்க்கண்ட

	X பரவல்	Y பரவல்
கூறு சராசரி	$\overline{X}$	$\overline{Y}$
கூறு உருவ அளவு	m	n

கூறு விவரங்களைக் கொண்டு, கூறு அளவை Z-ஐ

$$Z = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{D(\overline{X} - \overline{Y})} = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{m} + \dfrac{\sigma_2^2}{n}}}$$

எடுத்துக் கொள்வோம்.

கூறுமாறிகளின் கண்டறிந்த மதிப்புக்கள் வாயிலாகக் கூறு சராசரிகளின் மதிப்புக்கள் $\overline{X}$, $\overline{Y}$ ஆகியவைகளைக் கணக்கிட்டு, அத்துடன் σ_1^2, σ_2^2, m, n ஆகியவைகளின் மதிப்புக்களையும் கூறு அளவை Z-ல் பிரதியிட்டு அதன் மதிப்பைப் பெறுகிறோம்.

மாற்று எடுகோளின் கீழ் $\mu_1 > \mu_2$ எனக் கொள்வதாலும், மிகைத் தன்மை மட்டம் $\alpha\%$ என்பதாலும், கூறு அளவையின் அணுகுகோடு பரவல், திட்ட இயல்நிலைப் பரவல் ஆவதாலும், சோதனைக்கு ஏற்றதான தீர்வு கட்டமான வெளி ω-ஐ

$$\omega = \{ x : K_\alpha \leqslant x \leqslant \infty \}$$

ஆக எடுத்துக் கொள்கிறோம்.

இப்போது, கூறு அளவையின் மதிப்பு, தீர்வு கட்டமான வெளியில் உள்ளடங்கியிருப்பின், சூனிய எடுகோள் மறுக்கத்தக்கதெனவும், அவ்வாறில்லையெனில் மறுக்கத்தகாதெனவும் உய்த்துணருகிறோம்.

மாற்று எடுகோளின் கீழ் $\mu_1 < \mu_2$ என அமைப்போமெனில் சோதனைக்கு ஏற்றதான தீர்வு கட்டமான வெளி ω-ஐ

$$\omega = \left\{ x : -\infty < x \leq -K_\alpha \right\}$$

எனவும், மாற்று எடுகோளின் கீழ் $\mu_1 < \mu_2$ என அமைப்போமெனில், சோதனைக் கேற்றதான தீர்வு கட்டமான வெளி ω-ஐ

$$\omega = \left\{ x : -\infty < x \leq -K_{\frac{\alpha}{2}} \right\} \cup \left\{ x : K_{\frac{\alpha}{2}} \leq x < \infty \right\}$$

எனவும் எடுத்துக்கொண்டு உய்த்துணருகிறோம்.

பரவல் திட்ட விலக்கங்கள் σ_1, σ_2 ஆகியவைகளின் மதிப்புக்கள் தெரியாதபோது, கூறு திட்ட விலக்கங்கள் s_1, s_2 ஆகியவைகளின் மதிப்புக்களை முறையே σ_1, σ_2 ஆகியவைகளின் மதிப்புக்களாகக் கொள்கிறோம்.

கணக்கு

A, *B* ஆகிய இரு மாநிலங்களில் பண்ணைத் தொழிலாளர்களின் ஆண்டு வருமான (ரூபாய்களில்) புள்ளி விவரங்கள் பின்வருமாறு :

	மாநிலம் A	மாநிலம் B
கூறு சராசரி	2934	2987
கூறு திட்ட விலக்கம்	85	92
கூறு உருவ அளவு	100	50

இவைகள் வாயிலாக A மாநிலப் பண்ணைத் தொழிலாளர்களின் சராசரி ஆண்டு வருமானம் B மாநிலப் பண்ணைத் தொழிலாளர்களின் சராசரியை விடக் குறைவாகுமா என 5% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்க.

முறை

A, B மாநிலப் பண்ணைத் தொழிலாளர்களின் சராசரி ஆண்டு வருமானம் முறையே μ_1, μ_2 எனக் கொள்வோம்.

சூனிய எடுகோளின் கீழ் $\mu_1 = \mu_2$ எனவும்

மாற்று எடுகோளின் கீழ் $\mu_1 < \mu_2$ எனவும்

அமைப்போம்.

இப்போது, $\bar{X} = 2934, \quad \bar{Y} = 2987,$

$S_1 = 85, \quad S_2 = 92,$

$n_1 = 100, \quad n_2 = 50$

ஆகிய கூறு விவரங்களிலிருந்து, கூறு அளவை Z-ன்

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}}$$

$$= \frac{2934 - 2987}{\sqrt{\dfrac{85^2}{100} + \dfrac{92^2}{50}}} = -3{\cdot}42$$

மதிப்பைப் பெறுகிறோம்.

மாற்று எடுகோளின் கீழ் $\mu_1 < \mu_2$ எனவும், மிகைத் தன்மை மட்டம் 5% எனவும் அமைவதால் சோதனைக்கான தீர்வு கட்டமான வெளி

$$w = \{ x : \; -\infty < x < -1{\cdot}96 \}$$

ஆகும்.

கூறு அளவை Z-ன் கண்டறிந்த மதிப்பு $-3{\cdot}42$ ஆனது தீர்வு கட்டமான வெளியில் உள்ளடங்கியிருப்பதால், சூனிய எடுகோள் மறுக்கத் தக்கது என உய்த்துணருகிறோம். ஆகவே, கொடுக்கப் பட்ட கூறு விவரங்களிலிருந்து A மாநிலப் பண்ணைத் தொழிலாளர்களின் சராசரி வருமானம் B மாநிலப் பண்ணைத் தொழிலாளர்களின் சராசரி வருமானத்தைவிடக் குறைவாகும் என 5% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் உய்த்துணருகிறோம்.

இரு திட்ட விலக்கங்களின் வேறுபாட்டிற்கான சோதனை

இரு ராண்டம் மாறிகள் X, Y ஆகியவைகளின் பரவல் திட்ட விலக்கங்கள் σ_1, σ_2 எனக் கொள்வோம். X பரவலிலிருந்து பெற்ற சமவாய்ப்புக் கூறு மாறிகள் $X_1, X_2, \ldots, X_m$, Y பரவலிலிருந்து பெற்ற சமவாய்ப்புக் கூறு மாறிகள் $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ ஆகியவைகள் வாயிலாக இரு பரவல்களின் திட்ட விலக்கங்கள் சமமாகுமா? அதாவது $\sigma_1 = \sigma_2$ எனக் கொள்ளலாமா என்பதை $\alpha\%$ மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்வது பற்றி இப்போது காண்போம்.

முதலில் X, Y மாறிகளின் பரவல் திட்ட விலக்கங்கள் சமம். அதாவது $\sigma_1 = \sigma_2$ எனும் சூனிய எடுகோளையும் அதற்கு எதிராக $\sigma_1 > \sigma_2$ எனும் மாற்று எடுகோளையும் எடுத்துக் கொள்வோம்.

அடுத்து கீழ்க்கண்ட

	X பரவல்	Y பரவல்
கூறு திட்ட விலக்கம்	s_1	s_2
கூறு உருவ அளவு	m	n

கூறு விவரங்களைக் கொண்டு கூறு அளவை Z-ஐ

$$Z = \frac{s_1 - s_2}{D\,(s_1 - s_2)} = \frac{s_1 - s_2}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{2m} + \dfrac{s_2^2}{2n}}}$$

எடுத்துக் கொள்வோம்.

கூறு மாறிகளின் கண்டறிந்த மதிப்புக்கள் வாயிலாக, கூறு திட்ட விலக்கங்களின் மதிப்புக்கள் s_1, s_2 ஆகியவைகளைக் கணக்கிட்டு m, n ஆகியவைகளின் மதிப்புக்களையும், கூறு அளவை Z-ல் பிரதியிட்டு அதன் மதிப்பையும் பெறுகிறோம்.

மாற்று எடுகோளின் கீழ் $\sigma_1 > \sigma_2$ எனக் கொள்வதாலும், மிகைத்தன்மை மட்டம் $\alpha\%$ என்பதாலும், கூறு அளவையின் அணுகுகோடு பரவல் திட்ட இயல்நிலைப் பரவலாவதாலும், சோதனைக்கு ஏற்றதான தீர்வு கட்டமான வெளி ω-ஐ

$$\omega = \{ x : K_\alpha \leq x \leq \infty \}$$

ஆக எடுத்துக் கொள்கிறோம்.

இப்போது, கூறு அளவையின் மதிப்பு, தீர்வு கட்டமான வெளியில் உள்ளடங்கி இருப்பின், சூனிய எடுகோள் மறுக்கத் தக்கதென வும், அவ்வாறில்லையெனில் அது மறுக்கத் தகாதெனவும் உய்த் துணருகிறோம்.

மாற்று எடுகோளின் கீழ் $\sigma_1 < \sigma_2$ என அமைப்போமெனில் சோதனைக்கு ஏற்றதான தீர்வு கட்டமான வெளி ω-ஐ

$$\omega = \{ x : -\infty < x \leqslant -K_{\alpha} \}$$ எனவும்,

மாற்று எடுகோளின் கீழ் $\sigma_1 < \sigma_2$ என அமைப்போமெனில், சோதனைக்கு ஏற்றதான தீர்வுகட்டமான வெளி w-ஐ

$$\omega = \left\{ x : -\infty < x < -K_{\frac{\alpha}{2}} \right\} \cup \left\{ x : K_{\frac{\alpha}{2}} \leq x < \infty \right\},$$

எனவும் எடுத்துக்கொண்டு உய்த்துணருகிறோம்.

கணக்கு

தேயிலை, காப்பி இவ்விரு தோட்டத் தொழிலாளர்களின் வார ஊதியத்தின் விவரங்கள் பின்வருமாறு.

	தேயிலை	**காப்பி**
கூறு உருவ அளவு	72	200
கூறு திட்ட விலக்கம் (ரூபாய்களில்)	12	10

இவ்விவரங்களைக் கொண்டு, தேயிலைத் தோட்டத் தொழிலாளர்களின் வார ஊதிய மதிப்புகளின் திட்ட விலக்கம், காப்பித் தோட்டத் தொழிலாளர்களின் ஊதிய மதிப்புகளின் திட்ட விலக் கத்தைவிட அதிகமாகுமா என 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்க.

முறை

தேயிலை, காப்பித் தோட்டத் தொழிலாளர்களின் வார ஊதிய மதிப்புகளின் திட்ட விலக்கங்கள் முறையே σ_1, σ_2 எனக்கொள்வோம்.

சூனிய எடுகோளின் கீழ் $\sigma_1 = \sigma_2$ எனவும்
மாற்று எடுகோளின் கீழ் $\sigma_1 > \sigma_2$ எனவும்

அமைப்போம்.

இப்போது,

$$S_1 = 12, \quad S_2 = 10, \quad n_1 = 72, \quad n_2 = 200$$

ஆகிய கூறு விவரங்களைக்கொண்டு கூறு அளவை Z-ன்

$$Z = \frac{S_1 - S_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{2n_1} + \frac{S_2^2}{2n_2}}} = \frac{12-10}{\sqrt{\frac{144}{144} + \frac{100}{400}}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1 + 0.25}} = 1.79$$

மதிப்பைப் பெறுகிறோம்.

மாற்று எடுகோளின் கீழ் $\sigma_1 > \sigma_2$ எனவும், மிகைத்தன்மை மட்டம் 5% எனவும் அமைவதால் சோதனைக்கான தீர்வு கட்டமான வெளி

$$\omega = \{ 1{\cdot}65 \leqslant x < \infty \} \text{ ஆகும்.}$$

கூறு அளவை Z-ன் கண்டறிந்த மதிப்பு 1·79 ஆனது தீர்வு கட்டமான வெளியில் உள்ளடங்கி அமைவதால் சூனிய எடுகோள் மறுக்கத் தக்கது என உய்த்துணருகிறோம். ஆகவே, கொடுக்கப் பட்ட கூறு விவரங்களிலிருந்து தேயிலைத் தோட்டத் தொழிலாளர் களின் வார ஊதிய மதிப்புகளின் திட்டவிலக்கம் காப்பித் தோட் டத் தொழிலாளர்களின் வார ஊதிய மதிப்புகளின் திட்ட விலக் கத்தை விட அதிகமாகும் என 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் உய்த்துணருகிறோம்.

இரு விகிதங்களின் வேறுபாட்டிற்கான சோதனை

இரு ராண்டம் மாறிகள் X, Y ஆகியவைகளின் பரவல் விகிதங்கள் P_1, P_2 எனக் கொள்வோம். X பரவலிலிருந்து பெற்ற சமவாய்ப்புக் கூறுமாறிகள் $X_1, X_2, \ldots, X_m$, Y பரவலிலிருந்து பெற்ற சமவாய்ப்புக் கூறுமாறிகள் $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ ஆகியவைகள் வாயிலாக, இரு பரவல்களின் விகிதங்கள் சமமாகுமா? அதாவது $P_1 = P_2$ எனக் கொள்ளலாமா என்பதை α% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்வது பற்றி இப்போது காண்போம்.

முதலில் X, Y மாறிகளின் பரவல் விகிதங்கள் சமம், அதாவது $P_1 = P_2$ எனும் சூனிய எடுகோளையும், அதற்கு எதிராக $P_1 > P_2$ எனும் மாற்று எடுகோளையும் எடுத்துக் கொள்வோம்.

அடுத்து, கீழ்க்கண்ட

	X பரவல்	Y பரவல்
கூறு விகிதம்	π_1	π_2
கூறு உருவ அளவு	m	n

கூறு விவரங்களைக் கொண்டு கூறு அளவை Z-ஐ

$$Z = \frac{\pi_1 - \pi_2}{D(\pi_1 - \pi_2)} = \frac{\pi_1 - \pi_2}{\sqrt{U(1-U)\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)}}$$

இங்கு $U = \dfrac{m\pi_1 + n\pi_2}{m + n}$

எடுத்துக் கொள்வோம்.

கூறு மாறிகளின் கண்டறிந்த மதிப்புகள் வாயிலாக, கூறு விகிதங்களின் மதிப்புகள் π_1, π_2 ஆகியவைகளையும் கணக்கிட்டு, அவைகளையும், m, n ஆகியவைகளின் மதிப்புக்களையும், கூறு அளவை Z-ல் பிரதியிட்டு அதன் மதிப்பைப் பெறுகிறோம்.

மாற்று எடுகோளின் கீழ் $P_1 > P_2$ எனக் கொள்வதாலும், மிகைத்தன்மை மட்டம் $\alpha\%$ என்பதாலும், கூறு அளவையின் அணுகுகோடு பரவல் திட்ட இயல் நிலைப் பரவலாவதாலும், சோதனைக்கு ஏற்றதான தீர்வு கட்டமான வெளி ω-ஐ

$$\omega = \{ x : K_\alpha \leq x < \infty \}$$

ஆக எடுத்துக் கொள்கிறோம்.

இப்போது, கூறு அளவையின் மதிப்பு, தீர்வு கட்டமான வெளியில் உள்ளடங்கி இருப்பின் சூனிய எடுகோள் மறுக்கத்தக்கதெனவும், அவ்வாறில்லையெனில் அது மறுக்கத்தகாதெனவும் உய்த்துணருகிறோம்.

மாற்று எடுகோளின் கீழ் $P_1 < P_2$ என அமைப்போமெனில் சோதனைக்கேற்ற தீர்வு கட்டமான வெளி ω-ஐ,

$$\omega = \{ x : -\infty < x \leq -K_\alpha \}$$

எனவும்,

மாற்று எடுகோளின் கீழ் $P_1 \neq P_2$ என அமைப்போமெனில் சோதனைக்கேற்ற தீர்வு கட்டமான வெளி ω-ஐ

$$\omega = \left\{ x : -\infty < x \leq -K_{\frac{\alpha}{2}} \right\} \cup \left\{ x : K_{\frac{\alpha}{2}} \leq x < \infty \right\}$$

எனவும் எடுத்துக்கொண்டு உய்த்துணருகிறோம்.

கணக்கு

காசநோயால் பாதிக்கப்பட்டவர்களுக்குத் தடுப்பு மருந்து போடப்பட்டதில் கீழ்க்கண்ட விவரங்களைப் பெறுகிறோம்.

	பிழைத்தவர்கள்	இறந்தவர்கள்
தடுப்பு மருந்து போடப்பட்டவர்கள்	130	45
தடுப்பு மருந்து போடப்படாதவர்கள்	35	90

முழுமைத் தொகுதியில் தடுப்பு மருந்து போடப்பட்டவர்கள் போடப்படாதவர்களின் இறப்பு விகித மதிப்புகள் சமமானவைகளா என 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்க.

முறை

முழுமைத் தொகுதியின் தடுப்பு மருந்து போடப்பட்டவர்களின் இறப்பு விகித மதிப்பை P_1 எனவும், தடுப்பு மருந்து போடப்படாதவர்களின் இறப்பு விகித மதிப்பை P_2 எனவும் கொள்வோம்.

சூனிய எடுகோளின் கீழ் $P_1 = P_2$ எனவும்
மாற்று எடுகோளின் கீழ் $P_1 \neq P_2$ எனவும்

அமைப்போம்.

இப்போது

$$\pi_1 = \frac{45}{175} = 0{\cdot}257$$

$$\pi_2 = \frac{90}{125} = 0{\cdot}720$$

$$m = 175, \quad n = 125$$

$$U = \frac{m\pi_1 + n\pi_2}{m+n} = \frac{135}{300} = 0.45$$

ஆகிய விவரங்களைக் கொண்டு, கூறு அளவை Z-ன்

$$Z = \frac{\pi_1 - \pi_2}{\sqrt{U(1-U)\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)}}$$

$$= \frac{0.257 - 0.720}{\sqrt{\frac{135}{300}\left(1 - \frac{135}{300}\right)\left(\frac{1}{175} + \frac{1}{125}\right)}}$$

$$= -\frac{0.463}{0.058} = -8.02$$

மதிப்பைப் பெறுகிறோம்.

மாற்று எடுகோளின் கீழ் $P_1 \neq P_2$ எனவும், மிகைத்தன்மை மட்டம் 5% எனவும் அமைவதால் சோதனைக்கான தீர்வு கட்டமான வெளி

$$\omega = \{-\infty < x \leq -1.96\} \cup \{1.96 \leq x < \infty\}$$

ஆகும்.

கூறு அளவை Z-ன் கண்டறிந்த மதிப்பு − 8·02 ஆனது தீர்வு கட்டமான வெளியில் உள்ளடங்கி இருப்பதால் சூனிய எடுகோள் மறுக்கத்தக்கது என உய்த்துணருகிறோம். ஆகவே, கொடுக்கப் பட்ட கூறு விவரங்களிலிருந்து முழுமைத் தொகுதியின் இறப்பு விகித மதிப்புகள் சமமானவைகள் அல்ல என 5% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் உய்த்துணருகிறோம்.

ஒட்டுறவுக் கெழுவிற்கான சோதனை

ஒரு நகரத்திலிருந்து 1,600 பசுக்களைத் தேர்ந்தெடுத்து அவை களின் ஒவ்வொன்றின் வார பால் அளவும், அப்பாலிலுள்ள வெண்ணெய் கொழுப்பு சத்தளவின் (butter fat) சதவீதம் ஆகிய இணைமதிப்புகளும் சேகரிக்கப்பட்டன. இவ்விணை மதிப்புகளின் ஒட்டுறவுக்கெழு −0·08 எனில், கூறு பிறந்த முழுமைத் தொகுதி யின் ஒட்டுறவுக்கெழு மதிப்பு பூச்சியமெனக் கொள்ளலாமா என்பதை 1% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்க.

முறை

நகரத்திலுள்ள மாடுகள் அடங்கியுள்ள முழுமைத் தொகுதியின் ஒட்டுறவுக்கெழு ρ எனக் கொள்வோம். சூனிய எடுகோளின் கீழ் $\rho = \rho_0 = 0$ எனவும், மாற்று எடுகோளின் கீழ் $\rho \neq 0$ எனவும் அமைந்துக் கொள்வோம்.

இப்போது,

கூறு உருவ அளவு $n = 14{,}400$

கூறு ஒட்டுறவுக்கெழு $r = -0{\cdot}08$

ஆகியவைகளைக் கொண்டு சோதனைக்கான கூறு அளவை Z-ன்,

$$Z = \frac{r - \rho}{\dfrac{1-\rho^2}{\sqrt{n}}}$$

$$= -\frac{0{\cdot}08}{\dfrac{1}{\sqrt{1600}}} = -3{\cdot}20$$

மதிப்பைப் பெறுகிறோம்.

மாற்று எடுகோளின் கீழ் $\rho \neq o$ எனவும், மிகைத்தன்மை மட்டம் 1% எனவும் கொள்வதால், சோதனைக்கான தீர்வு கட்டமான வெளி

$$\omega = \{ x : -\infty < x \leq -2{\cdot}58 \} \cup \{ 2{\cdot}58 \leq x < \infty \} \text{ ஆகும்.}$$

கூறு அளவை Z-ன் கண்டறிந்த மதிப்பு $-3{\cdot}2$ ஆனது தீர்வு கட்டமான வெளியில் உள்ளடங்கியிருப்பதால் சூனிய எடுகோள் மறுக்கத் தக்கது என உய்த்துணருகிறோம். ஆகவே, கொடுக்கப்பட்ட கூறு விவரங்களிலிருந்து அந்நகரத்திலுள்ள பசுக்கள் முழுமைத் தொகுதியில், வார பால் அளவு, பாலிலுள்ள வெண்ணெய் கொழுப்பளவின் சதவீதம் ஆகிய மாறிகளின் ஒட்டுறவுக்கெழு பூச்சியமெனக் கொள்ளலாகாது என 1% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் உய்த்துணருகிறோம்.

கைவர்க்கச் சோதனைகள்

$X_1, X_2, \ldots\ldots, X_{k-1}$ ஆகிய $(K-1)$ தனித்த ராண்டம் மாறிகள் இணைந்த பரவல் $n, p_1, p_2, \ldots\ldots, p_{k-1}$ ஆகிய சுட்டுறுப்புகளைக் கொண்ட பல்லுறுப்புப் பரவல்,

$$f_{X_1, X_2, \ldots, X_{k-1}}(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}) = \frac{n!\, p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots p_{k-1}^{x_{k-1}}}{x_1!\, x_2! \ldots !\, x_{k-1}!} \cdot \frac{(1-p_1-p_2 \ldots - p_{k-1})^{n-x_1-x_2 \ldots - x_{k-1}}}{(n-x_1-x_2 \ldots - x_{k-1})!},$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_{k-1} \in (0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1} \leq n$$

$$= 0 \quad , \text{ மற்றபடி}$$

என்க.

$$X_k = n - (X_1 + X_2 + \ldots + X_{k-1}),$$

$$p_k = 1 - (p_1 + p_2 + \ldots + p_{k-1})$$

எனக் குறிப்பிடுவோம்.

இப்போது ராண்டம் மாறி ϕ^2-ஐக் கீழ்க்கண்டவாறு வரையறை

$$\phi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(X_i - n p_i)^2}{n p_i}$$

செய்வோம். n பெருமதிப்புடையதெனில் ϕ^2-ன் அணுகு கோடு பரவலானது $(K-1)$ கட்டின்மைகள் கொண்ட கைவர்க்கப் பரவலாகும் என்பது ஒரு முக்கிய தேற்றமாகும். X_i-ன் கண்டறிந்த மதிப்பும், அதன் எதிர் பார்க்கும் மதிப்பு $n p_i$-ம் $(i = 1, 2, \ldots, k)$ 5-க்குக் கூடுதலாக அமைய வேண்டுமென்பது தேற்றத்தின் ஒரு நிபந்தனையாகும். இத் தேற்றத்தை அடிப் படையாகக் கொண்டு அமைக்கப்பட்டுள்ள சில சோதனைகளை இப்போது காண்போம்.

ஒரு ராண்டம் சோதனையின் கூறு வெளி Ω-ஆனது $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ஆகிய K பிரிந்த கணங்களின் சேர்ந்த கணம் எனவும், சோதனையின் விளைவானது A_i கணத்தில் உள்ளடங்கியிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $P(A_i) = p_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, $p_k = 1 - p_1 - p_2 - \ldots - p_{k-1}$ எனவும் கொள்வோம். சோதனையைச் சார்பற்ற, முழுதொத்தவாறு n முறைகள் திரும்பத் திரும்பச் செய்யும்போது, $A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}, A_k$ ஆகிய கணங்களில் உள்ளடங்கியிருக்கும் விளைவுகளை முறையே $X_1, X_2, \ldots, X_{k-1}, X_k = n - X_1 - X_2 - \ldots - X_{k-1}$ எனக் குறிப்பிடுவோமெனில், $X_1, X_2, \ldots, X_k$ ஆகிய ராண்டம் மாறிகளின் இணைந்த பரவல், $n, p_1, p_2, \ldots, p_{k-1}$ ஆகிய சுட்டுறுப்புகளைக் கொண்ட பல்லுறுப்புப் பரவலாக அமைகிறது.

இப்போது $p_{10}, p_{20}, \ldots\ldots, p_{(k-1)0}$ ஆகிய மெய்யெண்கள் கீழ்க் கண்ட $0 \leq p_{i0} \leq 1,\ \ i = 1, 2, \ldots\ldots, (k-1),\ \ p_{k0} = 1-(p_{10} + p_{20} + \ldots\ldots + p_{k-1,0})$ நிபந்தனைக்கு உட்பட்டுள்ள நிலையெண்கள் எனவும், இவைகளின் மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன எனவும் கொள்வோம்.

சூனிய எடுகோளின் கீழ் $p_1 = p_{10}, p_2 = p_{20}, \ldots\ldots, p_k = p_{k0}$ எனவும், மாற்று எடுகோளின் கீழ் சூனிய எடுகோள் உண்மையல்ல எனவும் அமைத்துக் கொள்வோம். சோதனைக்கு ஏற்றதான கூறு அளவை ϕ^2-ஐ

$$\phi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(X_i - n\,p_{i0})^2}{n\,p_{i0}}$$

எடுத்துக் கொள்வோம். சூனிய எடுகோள் உண்மையாயின் ϕ^2-ன் மதிப்பு பூச்சியத்திற்கு நெருக்கமாகவும், சூனிய எடுகோள் உண்மையில்லாதாயின் ϕ^2 பெருமதிப்புடையதாகவும் அமை கிறது. n பெருமதிப்புடையதெனில், ϕ^2-ன் கூறுபரவல், $(k-1)$ கட்டின்மை கொண்ட கைவர்க்கப் பரவலாக அமைவதால், மெய்யெண் C-யைக் கீழ்க்கண்ட நிபந்தனைக்கு

$$P_r(\phi^2 \leq C) = \int_{C}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{n-2}{2}} \left|\overline{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\right.} e^{-\frac{u}{2}} u^{\frac{n-1}{2}-1} du$$

$$= \alpha\ ,\qquad 0 < \alpha < 1$$

உட்படும்படி எடுத்துக் கொண்டு, சோதனைக்கு ஏற்றதான தீர்வு கட்டமான வெளி w-ஐ

$$w = \{ x : c \leq x < \infty \}$$

அமைக்கிறோம்.

கூறு அளவை ϕ^2-ன் கண்டறிந்த மதிப்பானது தீர்வு கட்டமான வெளி w-ல் உள்ளடங்கியிருக்குமெனில், சூனிய எடுகோள் மறுக்கத்தக்கதெனவும், அவ்வாறில்லையெனில் அது மறுக்கத்தகா தெனவும் α சதவீத மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் உய்த்துணரு கிறோம்.

மேலே விளக்கப்பட்ட சோதனையில், சூனிய எடுகோளின் கீழ் $p_1 = p_{10},\ p_2 = p_{20}\ \ldots,\ p_k = p_{k0}$ எனவும், $p_{10}, p_{20}, \ldots,\ p_{k0}$

ஆகியவைகளின் மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன எனவும் குறிப் பிட்டோம். இப்போது p_{10}, p_{20}, ..., p_{ko} ஆகியவைகளின் மதிப்புகள் θ_1, θ_2, ..., θ_r ஆகிய மதிப்பு தெரியாத r சுட்டுறுப்பு களைச் சார்ந்துள்ளன எனவும் கொள்வோம். அப்போது சுட்டுறுப்பு மதிப்புகளைக் கூறு மாறிகள் வாயிலாக மதிப்பிட்டுப் பின்பு அவைகளைக் கொண்டு p_{10}, p_{20}, ..., p_{ko} ஆகியவைகளின் மதிப்பு களைப் பெறுகிறோம்.

இப்போது, கூறு அளவை ϕ^2-ன்

$$\phi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(X_i - n\,p_{io})^2}{n\,p_{io}}$$

அணுகுகோட்டுப் பரவல் $(k-r-1)$ கட்டின்மைகள் கொண்ட கைவர்க்கப் பரவலாகும் என்பது பிறிதொரு தேற்றமாகும். இத்தேற்றத்தின் வாயிலாகவும் சோதனைகளை மேற்கொள்கிறோம்.

கணக்கு

ஒரு கூறில் இடம்பெறும் 300 நபர்களின் எடை மதிப்புகள் (பவுண்டுகளில்) பின்வருமாறு:

பிரிவு இடைவெளி	கண்டறிந்த அலைவெண்
150—158	9
159—167	24
168—176	51
177—185	66
186—194	72
195—203	48
204—212	21
213—221	6
222—230	3
மொத்தம்	300

இக்கூறு விவரங்கள் வாயிலாக நபர்களின் எடை மதிப்பைக் குறிக்கும் மாறி ஓர் இயல்நிலை மாறியாகும் என முடிவு கொள்ள லாமா என்பதை 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்.

முறை

முதல் நபர்களின் எடை மதிப்பைக் குறிக்கும் மாறி ஓர் இயல்நிலை மாறியாகும் எனும் சூனிய எடுகோளையும், சூனிய எடுகோள் உண்மையல்ல எனும் மாற்று எடுகோளையும் அமைத்துக் கொள்வோம்.

சூனிய எடுகோள் உண்மையாயின், இயல்நிலை மாறியின் மதிப்பு, 149·5—158·5, 158·5—167·5, ..., 221·5—230·5 ஆகிய 9 பிரிவு இடைவெளிகள் அமைவதற்கான நிகழ்தகவுகளை முறையே p_{10}, p_{20}, ..., p_{90} எனக் குறிப்பிடுவோம். இந்நிகழ்தகவுகள் இயல்நிலை மாறியின் சராசரி, திட்டவிலக்கம் ஆகிய இரு சுட்டுறுப்புகளைச் சார்ந்துள்ளன. இச்சுட்டுறுப்புகளின் மதிப்புகள் கொடுக்கப்படவில்லையாதலால், அவைகளைக் கூறு விவரங்கள்

கூறு சராசரி = 184·3
கூறு திட்ட விலக்கம் = 14·54

வாயிலாக

$$\text{எடைப் பரவலின் சராசரி } \hat{\theta}_1 = 184\cdot3$$

$$\text{எடைப் பரவலின் திட்ட விலக்கம் } \hat{\theta}_2 = 14\cdot54$$

என மதிப்பிடுகிறோம். இப்போது p_{10}, p_{20}, ..., p_{90} ஆகியவைகளின் மதிப்புகளை இயல்நிலைப் பரவல் அட்டவணை கொண்டு

பிரிவு இடைவெளி	நிகழ்தகவு மதிப்புகள்	எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்கள்
149·5—158·5	0·0300	9·0
158·5—167·5	0·0846	25·4
167·5—176·5	0·1716	51·5
176·5—185·5	0·2873	71·2
185·5—194·5	0·2261	67·8
194·5—203·5	0·1486	44·6
203·5—212·5	0·0672	20·2
212·5—221·5	0·0210	6·3
221·5—230·5	0·0045	1·4

பெற்று, பிரிவு இடைவெளிகளுக்குரிய எதிர்பார்க்கும் அலைவெண் மதிப்புகளை அடைகிறோம்.

பிரிவு இடைவெளி 222·5 – 230·5 யில் எதிர்பார்க்கும் அலைவெண் மதிப்பு 5-க்குக் குறைவாக இருப்பதால் அவ்விடைவெளியை அதற்கு அடுத்துள்ள இடைவெளி 212·5 – 221·5 உடன் இணைத்து, இடைவெளி 212·5 – 230·5 ஆகக் கொள்கிறோம். இந்த இடைவெளியில் கண்டறிந்த அலைவெண்கள் 6+3=9, எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்கள் 6·3 + 1·4 = 7·7 ஆக அமைகின்றன. இப்போது இடைவெளிகளின் எண்ணிக்கை $K=8$ ஆகும்.

கூறு அளவை ϕ^2-ன் மதிப்பைக் கணக்கிடுகிறோம்.

$$\phi^2 = \sum_{i=1}^{8} \frac{(X_i - n\,p_{io})^2}{n\,p_{io}}$$

$$= \sum_{i=1}^{8} \frac{X_i^2}{n\,p_{io}} - n$$

$$= \frac{9^2}{9\cdot0} + \frac{24^2}{25\cdot4} + \dots\dots + \frac{9^2}{9\cdot7} - 300$$

$$= 1\cdot232$$

சூனிய எடுகோளின் கீழ் கூறு அளவை ϕ^2-ன் அணுகுகோடு பரவல் $(k-r-1) = (8-2-1) = 5$ கட்டின்மை கொண்ட கைவர்க்கப் பரவலாக அமைவதாலும், 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்ய விழைவதாலும் மெய்யெண் C கீழ்க்கண்ட நிபந்தனைக்கு

$$P_r\ (X_5^2 \geq C) = 0\cdot05$$

உட்படுமெனில், C-ன் மதிப்பு 11·1 ஆகும். எனவே, சோதனைக்கு ஏற்றதான தீர்வு கட்டமான வெளி

$$w = \{x : C \leq x < \infty\} = \{x : 11\cdot1 \leq x < \infty\}$$

ஆகும்.

கூறு அளவை ϕ^2-ன் கண்டறிந்த மதிப்பு 1·232 ஆனது தீர்வு கட்டமான வெளிக்குப் புறத்தே அமைவதால், சூனிய எடுகோள் மறுக்கத் தகாதது என உய்த்துணருகிறோம். ஆகவே, கொடுக்கப் பட்ட கூறு விவரங்களிலிருந்து நபர்களின் எடைமதிப்பைக் குறிப்பிடும் மாறியின் பரவல் ஓர் இயல்நிலைப் பரவல் எனக்

கொள்ளலாம் என 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் உய்த்துணருகிறோம்.

கணக்கு

கறுப்பு, வெள்ளை, பச்சை, சிவப்பு, நீலம் ஆகிய நிறங்களைக் கொண்ட கோலிகள் பெருமளவில் அடங்கியுள்ள ஒரு பெட்டியிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் 283 கோலிகளைத் தேர்ந்தெடுத்த போது கீழ்க்கண்ட பரவலைப் பெற்றுள்ளதாகக் கொள்க.

நிறம்	கோலிகளின் எண்ணிக்கை
கறுப்பு	25
வெள்ளை	77
பச்சை	114
சிவப்பு	48
நீலம்	19

இக்கூறு விவரங்கள் வாயிலாக, பெட்டியில் அடங்கியுள்ள கறுப்பு, வெள்ளை, பச்சை, சிவப்பு, நீல நிறக் கோலிகளின் விகிதங்கள் முறையே 0·07, 0·24, 0·38, 0·24, 0·07 என முடிவு கொள்ளலாமா என்பதை 10 சதவீத மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்க.

முறை

முதலில் பெட்டியில் அடங்கியுள்ள கறுப்பு, வெள்ளை, பச்சை, சிவப்பு, நீல நிறக் கோலிகளின் விகிதங்கள் முறையே 0·07, 0·24, 0·38, 0·24, 0·07 எனச் சூனிய எடுகோளையும், சூனிய எடுகோள் உண்மையல்ல என மாற்று எடுகோளையும் அமைத்துக் கொள்வோம்.

அடுத்து சூனிய எடுகோளின் கீழ் 283 கோலிகள் கொண்ட கூறில் கறுப்பு, வெள்ளை, பச்சை, சிவப்பு, நீலம் ஆகிய நிற கோலிகளின் எதிர்பார்க்கும் எண்ணிக்கைகளைக் கணக்கிட்டு அவைகள் வாயிலாகக் கூறு அளவை ϕ^2-ன் மதிப்பைப் பெறுவோம்.

நிறம்	எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு
கறுப்பு	$283 \times 0{\cdot}07 = 19{\cdot}8$
வெள்ளை	$283 \times 0{\cdot}24 = 67{\cdot}9$
பச்சை	$283 \times 0{\cdot}38 = 107{\cdot}6$
சிவப்பு	$283 \times 0{\cdot}24 = 67{\cdot}9$
நீலம்	$283 \times 0{\cdot}07 = 19{\cdot}8$

$$\phi^2 = \sum_{i=1}^{5} \frac{(X_i - np_i)^2}{np_i} = \sum_{i=1}^{5} \frac{X_i^2}{np_i} - n$$

$$= \frac{25^2}{19\cdot8} \times \frac{77^2}{67\cdot9} + \frac{114^2}{107\cdot6} + [\frac{48^2}{67\cdot9} + \frac{19^2}{19\cdot8} - 283$$

$$= 8\cdot83$$

சூனிய எடுகோளின் கீழ் கூறு அளவை ϕ^2-ன் அணுகுகோடு பரவல் $K - 1 = 4$ கட்டின்மைகள் கொண்ட கைவர்க்கப் பரவலாக அமைவதாலும் 10% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்ய விழைவதாலும் மெய்யெண் C கீழ்க்கண்ட நிபந்தனைக்கு

$$P_r(x_4^2 \geq C) = 0\cdot10$$

உட்படுமெனில், C-ன் மதிப்பு $7\cdot78$ என கைவர்க்க அட்டவணை யிலிருந்து பெறுகிறோம். எனவே, சோதனைக்கு ஏற்றதான தீர்வு கட்டமான வெளி

$$w = \{ x : c \leq x < \infty \}$$

$$= \{ x : 7\cdot78 \leq x < \infty \}$$

ஆகும்.

கூறு அளவை ϕ^2-ன் கண்டறிந்த மதிப்பு 8·83 ஆனது தீர்வு கட்டமான வெளியில் உள்ளடங்கியிருப்பதால், சூனிய எடுகோள் மறுக்கத்தக்கது என உய்த்துணருகிறோம். ஆகவே, கொடுக்கப் பட்ட கூறு விவரங்களிலிருந்து பெட்டியில் அடங்கியுள்ள கறுப்பு, வெள்ளை, பச்சை, சிவப்பு, நீலம் ஆகிய நிறக் கோலிகளின் விகிதங் கள் முறையே 0·07, 0·24, 0·38, 0·24, 0·07 என முடிவு கொள்வது சரியல்ல என 10% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் உய்த்துணரு கிறோம்.

கணக்கு

ஒரு நெடுஞ்சாலையில் ஒரு வாரம் ஏற்பட்ட சாலை விபத்துக் களைப் பற்றிய கீழ்க்கண்ட விவரங்கள் வாயிலாக, விபத்துக்களின் எண்ணிக்கை வாரத்தின் நாளுக்கு நாள் வேறுபட்டு அமைகிறதா என்பதை 1 சதவீத மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்க.

நாள்	விபத்துக்களின் எண்ணிக்கை
திங்கள்	15
செவ்வாய்	12
புதன்	16
வியாழன்	14
வெள்ளி	19
சனி	30
ஞாயிறு	34

முறை

விபத்துகளின் எண்ணிக்கை நாளுக்கு நாள் வேறுபடாது ஒரே படித்தானதாக அமைகிறது எனும் சூனிய எடுகோளை எடுத்துக் கொள்வோம்.

சாலை விபத்து திங்கள், செவ்வாய், புதன், வியாழன், வெள்ளி, சனி, ஞாயிறு ஆகிய நாட்களில் ஏற்படுவதற்கான நிகழ் தகவுகளை முறையே $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7$ எனக் குறிப்பிடும்போது, சூனிய எடுகோளின் கீழ்

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = p_7$$

ஆக எடுத்துக் கொள்கிறோம். சூனிய எடுகோள் உண்மையல்ல எனும் மாற்று எடுகோளை அமைத்துக் கொள்கிறோம்.

இப்போது, சூனிய எடுகோளின் கீழ் திங்கள் முதல் ஞாயிறு ஆகிய 7 நாட்களில் ஒவ்வொரு நாளிலும் விபத்து ஏற்படுவதற் கான நிகழ்தகவு $p_0 = \frac{1}{7}$ ஆகும். எனவே, ஒரு வாரத்தில் மொத்தம் 140 விபத்துகள் ஏற்பட்டுள்ளன வெனில், ஒவ்வொரு நாளும் ஏற்படக்கூடிய விபத்துகளின் எதிர்பார்க்கும் எண்ணிக்கை $\frac{1}{7} \times 140 = 20$ ஆக அமைகிறது.

கூறு அளவை ϕ^2-ன்

$$\phi^2 = \sum_{i=1}^{7} \frac{(X_i - np_0)^2}{np_0}$$

$$= \frac{1}{20}\left[(15-20)^2 + (12-20)^2 + (16-20)^2 + (14-20)^2 + (19-20)^2 + (30-20)^2 + (34-20)^2\right]$$

$$= 21{\cdot}9$$

மதிப்பைப் பெறுகிறோம்.

சூனிய எடுகோளின் கீழ் ϕ^2-ன் அணுகு கோடு பரவல் $(K-1)$ $(7-1) = 6$ கட்டின்மை கொண்ட கைவர்க்கப் பரவலாக அமைவதாலும், மிகைத்தன்மை மட்டம் 1% என்பதாலும், மெய்யெண் C ஆனது கீழ்க்கண்ட

$$P_r(x_6^2 \geq c) = 0{\cdot}01$$

நிபந்தனைக்கு உட்பட்டு அமையுமெனில், $C = 16{\cdot}8$ என கைவர்க்க அட்டவணையிலிருந்து பெறுகிறோம். சோதனைக்கான தீர்வுகட்டமான வெளி

$$w = \{x : c \leq x < \infty\} = \{x : 16{\cdot}8 \leq x < \infty\}$$

ஆகும்.

கூறு அளவையின் கண்டறித்த மதிப்பு 21·9 ஆனது தீர்வு கட்டமான வெளியில் உள்ளடங்கியிருப்பதால், சூனிய எடுகோள் மறுக்கத்தக்கது என உய்த்துணருகிறோம். ஆகவே, கொடுக்கப்பட்ட கூறு விவரங்களிலிருந்து, விபத்துகளின் எண்ணிக்கை வாரத்தின் நாளுக்கு நாள் வேறுபட்டு அமைகிறது என 1% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் உய்த்துணருகிறோம்.

சார்பற்ற தன்மைக்கான கைவர்க்கச் சோதனை (Chi-square test for independence)

ஒரு பண்பு அல்லது மாறி A-ன் ஒன்றையொன்று விலக்கும் பிரிவுகள் $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ஆகியன எனவும், பிறிதொருபண்பு அல்லது மாறி B-ன் ஒன்றையொன்று விலக்கும் பிரிவுகள் $B_1, B_2, \ldots, B_l$ ஆகியன எனவும் கொள்வோம். ஒரு ராண்டம் சோதனையின் விளைவு $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ஆகிய பிரிவுகளில் ஏதேனுமொன்றிலும், $B_1, B_2, \ldots, B_l$ ஆகிய பிரிவுகளில் ஏதேனுமொன்றிலும் உள்ளடங்கி யிருக்கும். அதாவது, சோதனையின் விளைவு

$$(A_i \cap B_j),\ i = 1, 2, \ldots, k;\quad j \ \ 1, 2, \ldots, l$$

ஆகிய வெட்டிய பிரிவுகளில் ஏதேனுமொன்றில் உள்ளடங்கியிருக்கும் எனவும், அவ்வாறு அமைவதற்கான நிகழ்தகவு P_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, k$; $j = 1, 2, \ldots, l$, $0 \leq P_{ij} \leq 1$, $\sum_{ij} P_{ij} = 1$ எனவும் கொள்வோம். இப்போது ராண்டம் சோதனையைச் சார்பற்ற, முழுதொத்தவாறு N முறைகள் திரும்பத் திரும்பச் செய்யும்போது kl வெட்டிய பிரிவு $(A_i \cap B_j)$-களின் உள்ளடங்கும் விளைவுகளின் எண்ணிக்கையைக் குறிப்பிட X_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, k$, $j = 1, 2, \ldots, l$ ஆகிய ராண்டம் மாறிகளை எடுத்துக் கொள்வோம். இவைகளைக் கொண்டு அமைக்கும் கூறு அளவை ϕ^2-ன்

$$\phi^2 = \sum_{i,j} \frac{(X_{ij} - N p_{ij})^2}{N p_{ij}}$$

அணுகு கோட்டுப் பரவல் ($kl-1$) கட்டின்மை கொண்ட கைவர்க்கப் பரவலாக அமைகிறது.

B பண்பு அல்லது மாறி

A பண்பு அல்லது மாறி

		$B_1 \; B_2 \; \ldots\ldots \; B_l$	மொத்தம்
A பண்பு அல்லது மாறி	A_1	$p_{11} \; p_{12} \ldots\ldots p_{1l}$	α_1
	A_2	$p_{21} \; p_{22} \ldots\ldots p_{2l}$	α_2
	$\vdots$	$\ldots\ldots$	$\vdots$
	$\vdots$	$\ldots\ldots$	$\vdots$
	$\vdots$	$\ldots\ldots$	$\vdots$
	A_k	$p_{k1} \; p_{k2} \ldots\ldots p_{kl}$	α_k
	மொத்தம்	$\beta_1 \; \beta_2 \; \ldots\ldots \; \beta_l$	1

இப்போது *A*, *B* ஆகியன சார்பற்றனவா, அதாவது

$P(A_i \cap B_j) = P(A_i)\, P(B_j)$, $i = 1, 2, \ldots\ldots, k$, $j = 1, 2, \ldots\ldots, l$ என சோதிக்க விழைவதாகக் கொள்வோம்.

$$P(A_i) = \sum_{j=1}^{l} p_{ij} = \alpha_i \quad , \quad i = 1, 2, \ldots\ldots, k \quad \text{எனவும்}$$

$$P(B_j) = \sum_{i=1}^{k} p_{ij} = \beta_j \; , \quad j = 1, 2, \ldots\ldots, l \quad \text{எனவும்}$$

குறிப்பிடுவோம். சூனிய எடுகோளின் கீழ்

$p_{ij} = \alpha_i \beta_j$, $i = 1, 2, \ldots\ldots, k$; $j = 1, 2, \ldots\ldots, l$ எனவும் மாற்று எடுகோளின் கீழ் சூனிய எடுகோள் உண்மையல்ல எனவும் அமைத்துக் கொள்கிறோம்.

α_i, $i = 1, 2, 3, \ldots\ldots, k$; β_j, $j = 1, 2, \ldots\ldots, l$ ஆகியவைகளின் மதிப்புகள் கொடுக்கப்படவில்லை யாதலால் அவைகளை X_{ij}-களின் வாயிலாக

$$\alpha_i\text{-ன் மதிப்பீடு} = \hat{\alpha}_i = \sum_{j=1}^{l} \frac{X_{ij}}{N} = \frac{X_{i\cdot}}{N}, \; i = 1, 2, \ldots\ldots, k$$

$$\beta_j\text{-ன் மதிப்பீடு} = \hat{\beta}_j = \sum_{i=1}^{k} \frac{X_{ij}}{N} = \frac{X_{\cdot j}}{N}, \; j = 1, 2, \ldots\ldots, l$$

பெறுகிறோம்.

$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = \sum_{j=1}^{l} \beta_j = 1$ ஆக அமைவதால், மதிப்பீடு செய்த α_i, β_j-களின் மொத்த எண்ணிக்கை $k-1+l-1 = k+l-2$ ஆகும்.

இப்போது, α_i, β_j ஆகியவைகளின் மதிப்பீடுகளைக் கொண்டு கூறு அளவை ϕ^2-ஐ

$$\phi^2 = \sum_{i,j} \frac{\left(X_{ij} - \frac{X_{i\cdot} X_{\cdot j}}{N}\right)^2}{\frac{X_{i\cdot} \cdot X_{\cdot j}}{N}}$$

அமைப்போம். சூனிய எடுகோள் உண்மையெனில் ϕ^2-ன் அணுகு கோடு பரவல் $kl-1-(k+l-2) = (k-1)(l-1)$ கட்டின்மைகள் கொண்ட கைவர்க்கப் பரவலாகும்.

மெய்யெண் C-ஐக் கீழ்க்கண்ட

$$P_r\,(X^2_r > C) = \int_C^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{r}{2}} \left|\frac{r}{2}\right.} e^{-\frac{u}{2}} u^{\frac{r}{2}-1} \, du,$$

$$r = (k-1)(l-1)$$

$$= \alpha \quad , \qquad 0 < \alpha < 1$$

நிபந்தனைக்கு உட்படும்படி எடுத்துக்கொண்டு, சோதனைக்கு ஏற்றதான தீர்வு கட்டமான வெளி w-ஐ

$w = \{ x : C \leq x < \infty \}$ அமைக்கிறோம்.

கூறு அளவை ϕ^2-ன் கண்டறிந்த மதிப்பானது தீர்வு கட்டமான வெளி w-ல் உள்ளடங்கியிருக்குமெனில், சூனிய எடுகோள் மறுக்கத்தக்கதெனவும், அவ்வாறில்லையெனில் அது மறுக்கத்தகாதெனவும் α சதவீத மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் உய்த்துணருகிறோம்.

மேலே குறிப்பிட்ட சோதனையில் A பண்பின் பிரிவுகள் A_1, A_2 ஆகியன எனவும், B பண்பின் பிரிவுகள் B_1, B_2 ஆகியன எனவும், ராண்டம் சோதனையை N முறைகள் திரும்பத் திரும்பச் செய்யும் போது ஏற்படும் விளைவுகளைப் பாகுபடுத்திக் கீழ்க்கண்ட 2×2 பட்டியலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன எனக் கொள்வோம்.

	B_1	B_2
A_1	$X_{11} = a$	$X_{12} = b$
A_2	$X_{21} = c$	$X_{22} = d$

இப்போது A, B ஆகியன சார்பற்றனவா என்பதைச் சோதிக்க எடுத்துக் கொள்ளும் கூறு அளவை

$$\phi^2 = \sum_{i,j} \frac{\left(X_{ij} - \dfrac{X_{i\cdot} X_{\cdot j}}{N}\right)^2}{\dfrac{X_{i\cdot} \cdot X_{\cdot j}}{N}}$$

$$= \frac{\left[a - \dfrac{(a+b)(a+c)}{N}\right]^2}{\dfrac{(a+b)(a+c)}{N}} + \frac{\left[b - \dfrac{(a+b)(b+d)}{N}\right]^2}{\dfrac{(a+b)(b+d)}{N}}$$

$$+ \frac{\left[c - \dfrac{(a+c)(c+d)}{N}\right]^2}{\dfrac{(a+c)(c+d)}{N}} + \frac{\left[d - \dfrac{(b+d)(c+d)}{N}\right]^2}{\dfrac{(b+d)(c+d)}{N}}$$

$$= \frac{N(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

ஆக எளிதாக அமைகிறது.

சூனிய எடுகோளின் கீழ் A, B ஆகியன சார்பற்றன எனக் கொள்ளும் போது கூறு அளவை ϕ^2-ன் அணுகுகோடு பரவல் $[(k-1)(l-1)] = [(2-1)\ (2-1)] = 1$ கட்டின்மை கொண்ட கைவர்க்கப் பரவலாகும். இதன் வாயிலாகச் சோதனையை மேற்கொண்டு உய்த்துணருகிறோம்.

கணக்கு

தாதுரா (Datura) செடிகளைப் பற்றிய கீழ்க்கண்ட விவரங்களைக் கொண்டு அவைகளின் மலர் வண்ணமும், கனித் தன்மையும் தொடர்புடையனவா என 5% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்க.

		கனிகளின் தன்மை		
		சொர சொரப்பான	வழவழப் பான	மொத்தம்
மலர்களின் தன்மை	ஊதா	20	82	102
	வெண்மை	10	54	64
	மொத்தம்	30	136	166

முறை

தாதுரா செடிகளின் மலர் வண்ணமும், கனிகளின் தன்மையும் தொடர்பற்றன எனும் சூனிய எடுகோளையும், சூனிய எடுகோள் உண்மையல்ல எனும் மாற்று எடுகோளையும் அமைத்துக் கொள்வோம்.

சூனிய எடுகோளின் கீழ் எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களைக் கணக்கிட்டுக் கீழே பட்டியலில் அமைப்போம்.

		கனிகளின் தன்மை	
		சொர சொரப்பான	வழவழப்பான
மலர்களின் தன்மை	ஊதா	18·43	83·57
	வெண்மை	11·57	52·43

கூறு அளவை ϕ^2-ன்

$$\phi^2 = \frac{(1\cdot57)^2}{18\cdot43} + \frac{(-1\cdot57)^2}{83\cdot57} + \frac{(-1\cdot57)^2}{11\cdot57} + \frac{(-1\cdot57)^2}{52\cdot43}$$

$$= (1\cdot57)^2 \left[\frac{1}{18\cdot53} + \frac{1}{83\cdot57} + \frac{1}{11\cdot57} + \frac{1}{52\cdot43} \right]$$

$$= (1\cdot57)^2 \,[0\cdot0542 + 0\cdot0119 + 0\cdot0864 + 0\cdot1907]$$

$$= 2\cdot4649\,[0\cdot3432] = 0\cdot8459$$

$$\therefore \phi^2 = 0\cdot8459$$

மதிப்பைப் பெறுகிறோம்.

சூனிய எடுகோளின் கீழ் கூறு அளவை ϕ^2-ன் அணுகுகோடு பரவலானது $(k-1)$ $(l-1) = (2-1)$ $(2-1) = 1$ கட்டின்மை கொண்ட கைவர்க்கப் பரவலாவதாலும், மிகைத்தன்மை மட்டம் 5% என்பதாலும், மெய்யெண் C ஆனது கீழ்க்கண்ட

$$P_r\,(x^2 \geq c) = 0\cdot05$$

நிபந்தனைக்கு உட்படுகிறதெனில் $c = 3\cdot841$ என கைவர்க்க அட்டவணையிலிருந்து பெறுகிறோம். எனவே, சோதனைக்கு ஏற்ற தான தீர்வு கட்டமான வெளி

$$w = \{x : c \leq x \leq \infty\} = \{x : 3\cdot841 \leq x < \infty\}$$

ஆகும்.

கூறு அளவை ϕ-ன் கண்டறிந்த மதிப்பு $0\cdot843$ ஆனது தீர்வு கட்டமான வெளியில் அடங்கியிராததால், சூனிய எடுகோள் மறுக்கத்தகாது என உய்த்துணருகிறோம். ஆகவே, கொடுக்கப் பட்ட கூறு விவரங்கள் வாயிலாக மலர்களின் தன்மை, கனிகளின் தன்மை ஆகியவைகள் சார்பற்றன என 5% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் உய்த்துணருகிறோம்.

கணக்கு

தந்தை, மகன் ஆகியோர்களின் உளப்பாங்கு (Temperament) பற்றிய விவரங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

தந்தை, மகன் ஆகியோர்களின் உளப்பாங்கு

		தந்தை			
		இனிய குணம்	முரண்டு பிடிக்கும் குணம்	முன் கோபம்	மொத்தம்
மகன்	இனிய குணம்	45	35	20	100
	முரண்டு பிடிக்கும் குணம்	25	40	35	100
	முன் கோபம்	40	35	25	100
		110	110	80	300

இவ்விவரங்களைக் கொண்டு, தந்தை, மகன் ஆகியோர்களின் உளப்பாங்கு சார்புடையதா என 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்க.

முறை

தந்தை, மகன் ஆகியோர்களின் உளப்பாங்கு சார்பற்றன எனும் சூனிய எடுகோளையும், சூனிய எடுகோள் உண்மையல்ல எனும் மாற்று எடுகோளையும் அமைத்துக் கொள்வோம்.

சூனிய எடுகோளின் கீழ் எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களைக் கணக்கிட்டுக் கீழே பட்டியல் அமைப்போம்.

		தந்தை		
		இனிய குணம்	முரண்டு பிடிக்கும் குணம்	முன் கோபம்
மகன்	இனிய குணம்	36·7	36·7	26·7
	முரண்டு பிடிக்கும் குணம்	36·7	36·7	26·7
	முன்கோபம்	36·7	36·7	26·7

கூறு அளவை ϕ^2-ன்

$$\phi^2 = \frac{45^2 + 35^2 + 40^2 + 25^2 + 40^2 + 35^2}{36 \cdot 7} + \frac{20^2 + 35^2 + 25^2}{26 \cdot 7} - 300$$

$$= 10 \cdot 73$$

மதிப்பைப் பெறுகிறோம்.

சூனிய எடுகோளின்கீழ் கூறு அளவை ϕ^2_ன் அணுகுகோடு பரவலானது $(k - 1)(l - 1) = (3 - 1)(3 - 1) = 4$ கட்டின்மைகள் கொண்ட கைவர்க்கப் பரவலாவதாலும், மிகைத்தன்மை மட்டம் 5% என்பதாலும், மெய்யெண் c ஆனது கீழ்க்கண்ட

$$P_r\,(x^2 \geq c) = 0 \cdot 05$$

நிபந்தனைக்கு உட்பட்டு அமைகிறதெனில், $c = 9 \cdot 488$ என கைவர்க்க அட்டவணையிலிருந்து பெறுகிறோம். எனவே, சோதனைக்கு ஏற்றதான தீர்வு கட்டமான வெளி

$$w = \{x : c \leq x < \infty\} = \{x : \; 9 \cdot 488 \leq x < \infty\}$$

ஆகும்.

கூறு அளவை ϕ^2-ன் கண்டறிந்த மதிப்பு $10 \cdot 73$ ஆனது தீர்வு கட்டமான வெளியில் உள்ளடங்கியிருப்பதால், சூனிய எடுகோள் மறுக்கத்தக்கது என உய்த்துணருகிறோம். ஆகவே, கொடுக்கப்பட்ட கூறு விவரங்களிலிருந்து தந்தை, மகன்களின் உளப்பாங்கு சார்புடையது என 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் உய்த்துணருகிறோம்.

கணக்கு

ஓர் ஆய்வில் இடம்பெறும் 500 குற்றவாளிகளின் மனநிலை, எடை ஆகியவைகளைப் பற்றிய பாகுபடுத்தப்பட்ட விவரங்கள் பின்வருமாறு.

		எடை (பவுண்டுகளில்)				
		130-க்குக் குறைவு	130–140	140–150	150-க்கு அதிகம்	மொத்தம்
மனநிலை	இயல்பான	70	100	120	110	400
	பலவீனமான	30	25	30	15	100
	மொத்தம்	100	125	150	125	500

இவ்விவரங்களைக் கொண்டு குற்றவாளிகளின் மனநிலை, எடை ஆகியவைகள் சார்பற்றனவா என 1% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்க.

முறை

குற்றவாளிகளின் மனநிலை, எடை ஆகியவைகள் சார்பற்றன எனும் சூனிய எடுகோளையும், சூனிய எடுகோள் உண்மையல்ல எனும் மாற்று எடுகோளையும் அமைத்துக் கொள்வோம்.

சூனிய எடுகோளின்கீழ் எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களைக் கணக்கிட்டுக் கீழே பட்டியலில் அமைப்போம்.

		எடை			
		130-க்குக் குறைவு	130–140	140–150	150-க்கு அதிகம்
மன நிலை	இயல்பான	80	100	120	100
	பலவீனமான	20	25	30	25

கூறு அளவை ϕ^2-ன்

$$\phi^2 = \frac{80^2}{80} + \frac{100^2}{100} + \dots + \frac{30^2}{30} + \frac{15^2}{25} - 500$$

$$= 11.20$$

மதிப்பைக் கணக்கிடுகிறோம்.

சூனிய எடுகோளின்கீழ் கூறு அளவை ϕ^2-ன் அணுகுகோடு பரவலானது $(k-1)(l-1) = (2-1)(4-1) = 3$ கட்டின்மைகள் கொண்ட கைவர்க்கப் பரவலாக அமைவதாலும், மிகைத்தன்மை மட்டம் 1% என்பதாலும், மெய்யெண் C ஆனது கீழ்க்கண்ட

$$P_r(X_3^2 \geq C) = 0.01$$

எனும் நிபந்தனைக்கு உட்படுகிறதெனில், $c = 11.341$ என கைவர்க்க அட்டவணையிலிருந்து பெறுகிறோம். எனவே, சோதனைக்கு ஏற்றதான தீர்வுகட்டமான வெளி w

$$w = \{x : c \leq x < \infty\} = \{x : 11.341 \leq x < \infty\}$$

ஆகும்.

கூறு அளவை ϕ^2-ன் கண்டறிந்த மதிப்பு 11·20 ஆனது தீர்வு கட்டமான வெளியில் அடங்கியிராததால், சூனிய எடுகோள் மறுக்கத்தகாதது என உய்த்துணருகிறோம். ஆகவே, கொடுக்கப் பட்ட கூறு விவரங்கள் வாயிலாக, குற்றவாளிகளின் மனநிலை, எடை ஆகியவைகள் சார்பற்றன என 1% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் உய்த்துணருகிறோம்.

ஒரே படித்தான தன்மைக்கான கைவர்க்கச் சோதனை (Chi-square test for homogeneity)

சார்பற்ற k பல்லுறுப்புப் பரவல்கள் $N_i, p_{i1}, p_{i2}, \ldots\ldots, p_{il}$, $i = 1, 2, \ldots\ldots, k$ ஆகிய சுட்டுறுப்புகளைக் கொண்டுள்ளன என் போம். $X_{ij}, j = 1, 2, \ldots\ldots, l;\ i = 1, 2, \ldots\ldots, k$ ஆகியன k பல் லுறுப்புப் பரவல்களுக்கான அலைவெண்கள் என்போம். இப்போது கூறு அளவை ϕ^2-ஐ

$$\phi^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \frac{(X_{ij} - N_i p_{ij})^2}{N_i p_{ij}}$$

எடுத்துக் கொள்வோம். $N_1, N_2, \ldots\ldots, N_k$ ஆகியவைகள் பெரு மதிப்புடையனவெனில், ϕ^2-ன் அணுகுகோடு பரவலானது $k(l-1)$ கட்டின்மை கொண்ட கைவர்க்கப் பரவலாகும்.

இப்போது, சூனிய எடுகோளின் கீழ்

$$p_{11} = p_{21} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = p_{k1}$$
$$p_{12} = p_{22} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = p_{k2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$p_{1j} = p_{2j} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = p_{kj}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$p_{1l} = p_{2l} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = p_{kl}$$

அதாவது k பல்லுறுப்புப் பரவல்களும் ஒரே படித்தானவை யெனவும், மாற்று எடுகோளின் கீழ் சூனிய எடுகோள் உண்மை யல்ல எனவும் அமைத்துக் கொள்வோம்.

இப்போது,

$$p_{1j} = p_{2j} = \ldots\ldots = p_{kj} = \beta_j\,,\quad j = 1, 2, \ldots\ldots, l$$

எனக் குறிப்பிடுவோமெனில், $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ldots\ldots\ldots + \beta_l = 1$ ஆகும்.

$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots\ldots, \beta_l$ ஆகிய சுட்டுறுப்புகளின் மதிப்பீடுகளை

$$\hat{\beta}_j = \frac{X_{1j}+X_{2j}+\ldots\ldots+X_{kj}}{N_1+N_2+\ldots\ldots+N_k} = \frac{X_{\cdot j}}{N}, \quad j = 1, 2, \ldots\ldots, l-1$$

$$\hat{\beta}_l = 1 - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 - \ldots\ldots - \hat{\beta}_{l-1}$$

பெற்று கூறு அளவை ϕ^2-ஐ

$$\phi^2 = \sum_{i,j} \frac{\left(X_{ij} - \frac{N_i X_{\cdot j}}{N}\right)^2}{\frac{N_i X_{\cdot j}}{N}}$$

அமைத்துக் கொள்கிறோம். சூனிய எடுகோள் உண்மையாயின் ϕ^2-ன் அணுகுகோடு பரவலானது $k(l-1)-(l-1)=(k-1)(l-1)$ கட்டின்மைகள் கொண்ட கைவர்க்கப் பரவலாகும்.

மெய்யெண் C-ஐக் கீழ்க்கண்ட

$$P_r(X^2_r > C) = \int_C^\infty \frac{1}{2^{\frac{r}{2}}\,\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)}\, e^{-\frac{u}{2}}\, u^{\frac{r}{2}-1}\, du, \quad r=(k-1)(l-1)$$

$$= \alpha, \quad 0 < \alpha < 1$$

நிபந்தனைக்கு உட்படும்படி எடுத்துக் கொண்டு, சோதனைக்கு ஏற்ற தான தீர்வு கட்டமான வெளி w-ஐ

$$w = \{ x : c \leq x < \infty \}$$

அமைக்கிறோம்.

கூறு அளவை ϕ^2-ன் கண்டறிந்த மதிப்பானது தீர்வு கட்டமான வெளி w-ல் உள்ளடங்கியிருக்குமெனில், சூனிய எடுகோள் மறுக்கத்தக்கதெனவும், அவ்வாறில்லையெனில் அது மறுக்கத் தகாதெனவும் α சதவீத மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் உய்த் துணருகிறோம்.

கணக்கு

ஆக்கத்திறன் சோதனையில் A, B, C, D ஆகிய நான்கு பள்ளி களிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட மாணவர்கள் பெற்ற மதிப் பெண்களைப் பற்றிய விவரங்கள் பின்வருமாறு :

பள்ளிகள்	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை			மொத்தம்
	150 மதிப்பு எண்களுக்குக் குறைவு	150 முதல் 250 வரை	250 மதிப்பு எண்களுக்குக் கூடுதல்	
A	44	80	16	140
B	60	85	15	160
C	67	112	21	200
D	27	65	8	100
மொத்தம்	198	342	60	600

இக் கூறு பரவல்களின் வாயிலாக நான்கு பள்ளிகளின் மாணவர்கள் ஆக்கத்திறன் குறித்து வேறுபடுகின்றனர் என முடிவு கொள்ளலாமா என்பதை 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்க.

முறை

A, *B*, *C*, *D* ஆகிய பள்ளி மாணவர்கள் ஆக்கத்திறன் சோதனையில்

(i) 150 மதிப்பெண்களுக்குக் குறைவாகப் பெறும் நிகழ்தகவு மதிப்புகள் முறையே p_{11}, p_{21}, p_{31}, p_{41} எனவும்,

(ii) 150 முதல் 250 வரை பெறும் நிகழ்தகவு மதிப்புகள் முறையே p_{12}, p_{22}, p_{32}, p_{42} எனவும்,

(iii) 250 மதிப்பெண்களுக்குக் கூடுதலாகப் பெறும் நிகழ்தகவு மதிப்புகள் முறையே p_{13}, p_{23}, p_{33}, p_{43} எனவும்

கொள்வோம். இப்போது நான்கு பள்ளி மாணவர்கள் ஆக்கத்திறத்தைக் குறித்து வேறுபடாது ஒரே படித்தானவர்கள்

$$p_{11} = p_{21} = p_{31} = p_{41}$$
$$p_{12} = p_{22} = p_{32} = p_{42}$$
$$p_{13} = p_{23} = p_{33} = p_{43}$$

எனும் சூனிய எடுகோளையும், சூனிய எடுகோள் உண்மையல்ல எனும் மாற்று எடுகோளையும் அமைத்துக் கொள்வோம்.

சூனிய எடுகோளின் கீழ் எதிர்பார்க்கும் மதிப்புகளைக் கணக்கிட்டுக் கீழ்க்கண்ட பட்டியலில் அளிக்கிறோம்.

பள்ளிகள்	எதிர்பார்க்கும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை			மொத்தம்
	150-க்குக் குறைவு	150-250	250-க்குக் கூடுதல்	
A	46·2	79·8	14·0	140·0 (N_1)
B	52·8	91·2	16·0	160·0 (N_2)
C	66·0	114·0	20·0	200·0 (N_3)
D	33·0	57·0	10·0	100·0 (N_4)
மொத்தம்	198 ($X_{\cdot 1}$)	342 ($X_{\cdot 2}$)	60 ($X_{\cdot 3}$)	600 (N)

கூறு அளவை ϕ^2-ன்

$$\phi^2 = \sum_{i,j} \frac{X_{ij}^2}{\left(\frac{N_i X_{.j}}{N}\right)} - N$$

$$= \left(\frac{44^2}{46\cdot2} + \frac{80^2}{79\cdot8} + \frac{16^2}{14} + \ldots + \frac{27^2}{33} + \frac{65^2}{57} + \frac{8^2}{10}\right) - 600$$

$$= 4\cdot570$$

சூனிய எடுகோளின் கீழ் ϕ^2-ன் அணுகுகோடு பரவலானது $(k-1)\ (l-1) = (4-1)\ (3-1) = 6$ கட்டின்மைகள் கொண்ட கைவர்க்கப் பரவலாக அமைவதாலும் 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தை எடுத்துக் கொள்வதாலும் மெய்யெண் c ஆனது கீழ்க் கண்ட நிபந்தனை

$$P_r\,(\chi_6^2 > c) = 0\cdot05$$

உட்படுகிறது எனில், c-யின் மதிப்பு 12·592 என கைவர்க்க அட்டவணையிலிருந்து பெறுகிறோம்.

சோதனைக்கு ஏற்றதான தீர்வுகட்டமான வெளி

$$w = \{ x : c \leq x < \infty \}$$
$$= \{ x : 12{\cdot}592 \leq x < \infty \}$$

ஆகும்.

கூறு அளவை ϕ^2-ன் கண்டறிந்த மதிப்பு 4·570 ஆனது தீர்வு கட்டமான வெளியில் உள்ளடங்கி யிராததால் சூனிய எடுகோள் மறுக்கத்தகாது என உய்த்துணருகிறோம். ஆகவே, கொடுக்கப் பட்ட கூறு விவரங்கள் வாயிலாக நான்கு பள்ளி மாணவர்களும் ஆக்கத்திறன் குறித்து வேறுபடாது ஒரே படித்தானவர்கள் என 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் உய்த்துணருகிறோம்.

8. பரவல் விடுபட்ட முறைகள்

(Distribution - Free Methods)

தேற்றம் 1

தொடர்ச்சியான ராண்டம் மாறி X-ன் நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல் $f_X(x)$ எனவும், பரவல் சார்பு $F_X(x)$ எனவும் கொள்வோம். அப்போது $Y = F_X(x)$ மாறியின் பரவலானது இடைவெளி $(0, 1)$ யில் அமையும் சீரான பரவல் (Uniform distribution) ஆகும்.

அதாவது, Y-ன் நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்

$$\begin{aligned} g_Y(y) &= 1 \quad , \qquad 0 < y < 1 \\ &= 0 \quad , \qquad \text{மற்றபடி} \end{aligned}$$

தெளிப்பு

X மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f_X(x)$ ஆனது,

$$\begin{aligned} f_X(x) &> 0 \quad , \qquad a < x < b \\ &= 0 \quad , \qquad \text{மற்றபடி} \end{aligned}$$

ஆக அமைகிறதெனக் கொள்வோம்.

X-ன் பரவல் சார்பு

$$\begin{aligned} F_X(x) &= 0, \qquad x \leq a \\ &= \int_a^x f_X(t)\, dt \quad , \quad a < t < x \\ &= 1 \quad , \qquad x \leq b \end{aligned}$$

ஆகும்.

$y = F(x)$ எனும் சார்பானது $A = \{ x : a < x < b \}$, $B = \{ y : 0 < y < 1 \}$ ஆகிய இரு கணப் பகுதிகளின் ஒன்றுக் கொன்றான உருமாற்றமாகும்.

இந்த உருமாற்றத்தின் ஜாக்கோபியன்,

$$J = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{f(x)} \text{ ஆகும்.}$$

எனவே, Y மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு,

$$g_Y(y) = |J| \quad f(x)$$
$$= \frac{1}{f(x)} f(x)$$
$$= 1, \quad 0 < y < 1$$
$$= 0, \quad \text{மற்றபடி}$$

எனவே, Y மாறியின் பரவலானது இடைவெளி $(0, 1)$ இல் அமையும் சீரான பரவலாகும்.

இப்போது, p-இன் மதிப்பு இடைவெளி $(0, 1)$ இல் அமைகிறது. அதாவது, $0 < p < 1$ எனக் கொள்வோம்.

$Y = F_X(x)$ ராண்டம் மாறியின் பரவலானது இடைவெளி $(0, 1)$ இல் அமையும் சீரான பரவலாதலால்,

$$P_r(Y \leq p) = \int_0^p dy = p$$

ஆகும்.

$$P_r(Y \leq p) = p_r(F_X(x) \leq p) \text{ ஆக அமைவதால்}$$
$$P_r(F_X(x) \leq p) = p$$

எனப் பெறுகிறோம். இதன் விளக்கத்தைப் பற்றி இப்போது காண்போம்.

$F_X(x) = P_r(X \leq x)$ என்பது, ராண்டம் மாறி X, மெய்யெண் x-க்குக் குறைவான மதிப்புக்களை ஏற்றுக் கொள்வதற்கான நிகழ்தகவு மதிப்பை — அதாவது — இடைவெளி $(-\infty, x)$ இல் அடங்கியுள்ள X-பரவலின் பரப்பைக் குறிக்கிறது.

இப்போது, $F_X(x) \leq P$ என்பது, இடைவெளி $(-\infty, x)$ இல் அடங்கியுள்ள X-பரவலின் பரப்பு $100\,p$ சதவீதத்திற்குக் குறைவானது என்பதைக் குறிக்கிறது.

எனவே, $P_r(F_X(x) \leq p) = p$ என்பது, இடைவெளி $(-\infty, x)$ இல் அடங்கியுள்ள X-பரவலின் பரப்பு $100\,p$ சதவீதத்திற்குக் குறைவாக அமைவதற்கான நிகழ்தகவு p ஆகும் என்பதைக் குறிக்கிறது.

தேற்றம் 2

ஒரு தொடர்ச்சியான ராண்டம் மாறி X-ன் நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல் $f(x)$ எனவும், பரவல் சார்பு $F(x)$ எனவும்,

$y_1, y_2, \ldots, y_n$ ஆகியவைகள் X-பரவலிலிருந்து பெற்ற n வரிசைக் கூறு அளவைகள் எனவும்,

$U_i = F(y_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n$ எனவும்

கொள்வோம்.

இப்போது,

(i) $U_1, U_2, \ldots, U_n$ ஆகிய மாறிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்,

$$\begin{aligned} g(u_1, u_2, \ldots, u_n) &= n! \quad 0 < u_1 < u_2 < \ldots < u_n < 1 \\ &= 0, \quad \text{மற்றபடி} \end{aligned}$$

ஆகவும்,

(ii) K-வது வரிசை அளவை U_k மாறியின் பரவல்,

$$\begin{aligned} g_k(u_k) &= \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\, u_k^{\,k-1} (1-u_k)^{\,n-k}, \quad 0 < u_k < 1 \\ &= 0, \quad \text{மற்றபடி} \end{aligned}$$

ஆகவும்,

(iii) $K < l$ என அமையும் K-வது, l-வது வரிசை அளவை U_k, U_l மாறிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்

$$\begin{aligned} g_{k,l}(u_k, u_l) &= \frac{n!}{(k-1)!\,(l-k-1)!\,(n-l)!}\, u_k^{\,k-1} (u_l - u_k)^{\,l-k-1} \\ &\qquad (1-u_l)^{\,n-l}, \quad 0 < u_k < u_l < 1 \\ &= 0, \quad \text{மற்றபடி} \end{aligned}$$

ஆகவும் அமைகின்றன.

தெரிப்பு

(i) X-மாறி பரவலிலிருந்து பெற்ற வரிசைக் கூறு அளவைகள் $y_1, y_2, \ldots, y_n$ எனில், இவைகளின் இணைந்த நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்,

$$h(y_1, y_2, \ldots, y_n) = n!\,f(y_1)\,f(y_2), \ldots, f(y_n),$$
$$-\infty < y_1 < y_2 \ldots < y_n < \infty$$
$$= 0, \quad \text{மற்றபடி}$$

ஆகும்.

$$U_1 = F(Y_1),\ U_2 = F(Y_2),\ \ldots,\ U_n = F(Y_n)$$

ஆகிய ராண்டம் மாறிகளை எடுத்துக் கொள்வோம்.

இப்போது, $u_1 = F(y_1),\ u_2 = F(y_2),\ \ldots,\ u_n = F(y_n)$ ஆகிய சார்புகள் வெளி A, வெளி B

$$A = \{(y_1, y_2, \ldots, y_n) : -\infty < y_1 < y_2 < \ldots < y_n < \infty\}$$
$$B = \{(u_1, u_2, \ldots, u_n) : u_i = F(y_i),\ i = 1, 2, \ldots, n \quad (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in A\}$$

ஆகிய இரு கணப் பகுதிகளின் ஒன்றுக்கொன்றான உருமாற்றமாகும்.

இந்த உருமாற்றத்தின் ஜாக்கோபியன் J எனில்,

$$\frac{1}{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial y_1} & \frac{\partial u_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial y_1} & \frac{\partial u_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial u_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial u_n}{\partial y_1} & \frac{\partial u_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

$$= f(y_1)\,f(y_2)\,\ldots f(y_n)$$

ஆகும்.

எனவே, $U_1,\ U_2,\ \ldots,\ U_n$ மாறிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்

$$g(u_1, u_2, \ldots, u_n) = |J|\ h(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$
$$= n!,\ 0 < u_1 < u_2 < \ldots < u_n < 1$$
$$= 0\ , \quad \text{மற்றபடி}$$

ஆகும்.

(ii) U_k-மாறியின் இறுதி நிலைப் பரவல்,

$$g_k(u_k) = \int_0^{u_k}\int_0^{u_{k-1}} \cdots \int_0^{u_3}\int_0^{u_2}\int_{u_k}^{1}\int_{u_{n-2}}^{1}\int_{u_{n-1}}^{1} n!\ du_n\, du_{n-1}\, du_{k+1}\, du_1\, du_2 \ldots du_{k-1}$$

$$= \frac{n\,!}{(k-1)\,!\,(n-k)\,!}\; u_k^{\,k-1}\;(1-u_k)^{\,n\;k} \quad , \quad 0 < u_k < 1$$

$$= \;0 \;, \qquad \text{மற்றபடி}$$

ஆகும். இது ஒரு பீட்டா பரவலாகும்.

(*iii*) U_k, U_l ஆகிய மாறிகளின் இணைந்த நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவல்,

$$g_{kl}\,(u_k, u_l) = \int_0^{u_l} \cdots \int_0^{u_3} \int_0^{u_2} \int_{u_k}^{u_l} \cdots \int_{u_{l-2}}^{u_l} \int_{u_l}^{0} \cdots \int_{u_{n-2}}^{0} \int_{u_{n-1}}^{0} n\,!$$

$$\times\; [\,du_n\;du_{n-1}\;\ldots\ldots\ldots\;du_{l+1}\;du_{l-1}\;du_{k+1}\;du_1\;du_2\;du_{k-1}$$

$$= \frac{n\,!}{(k-1)\,!\,(l-k-1)\,!\,(n-l)\,!}\; u_k^{\,k-1}\;(u_l-u_k)^{\,l-k-1}\;(1-u_l)^{\,n-l} \;,$$

$$0 < u_k < u_l < 1$$

$$= \;0 \;, \qquad \text{மற்றபடி}$$

ஆகும்.

வரையறை

பகுதிமானம் (Quartile)

ஒரு ராண்டம் மாறி X-இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x)$ ஆனது தொடர்ச்சியான சார்பு எனவும், பரவல் சார்பு $F(x)$ எனவும் கொள்வோம். p இன் மதிப்பு இடைவெளி $(0\;\;1)$ இல் அமைகிறது எனவும் கொள்வோம். $F(x)\quad p$ எனும் சமன்பாட்டின் தனி யொத்த தீர்வு (Unique solution) உளதாயிருக்கிறதெனில், இத் தீர்வு மதிப்பை, ராண்டம் மாறியின் **p-வது பகுதிமானம்** (Quartile of order p) என வழங்குகிறோம்.

பகுதிமானத்திற்கான நம்பிக்கை இடைவெளி

இப்போது ஒரு தொடர்ச்சியான மாறி X-ன் பரவல் சார்பு $F(x)$ எனவும், $y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n$ ஆகியவைகள் X பரவலிலிருந்து பெற்ற வரிசைக் கூறு அளவைகள் எனவும், X-இன் p-வது பகுதிமானம் ξ_p எனவும் கொள்வோம்.

K-வது வரிசைக் கூறு அளவை y_k ஆனது, p-வது பகுதிமானம் ξ_p மதிப்புக்குக் குறைவாக ஏற்படும் நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு,

$$P_r\,(\,y_k < \xi_p\,) = P_r\,[\,F\,(y_k\,) < F\,(\,\xi_p\,)\,]$$

ஆகும்.

இப்போது $F(y_k) = U_k$ என குறிப்பிடும்போது,

$P_r(y_k < \xi_p) = P_r[U_k < p]$, $\because F(\xi_p) = p$ ஆகும்.

தேற்றம் 2-இன் வாயிலாக,

$$P_r(U_k < p) = \int_0^p \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\, x^{k-1} (1-x)^{n-k}\, dx$$

$$= \sum_{r=k}^{n} \frac{n!}{r!\,(n-r)!}\, p^r (1-p)^{n-r}$$

என்பதால்,

$$P_r(y_k < \xi_p) = \sum_{r=k}^{n} \frac{n!}{r!\,(n-r)!}\, p^r (1-p)^{n-r}$$

ஆகும்.

இப்போது, $k < l$ என அமையும்படி l-ஐ எடுத்துக் கொள்க. நிகழ்ச்சி $(y_k < \xi_p)$ யானது, நிகழ்ச்சி $(y_l < \xi_p)$, நிகழ்ச்சி $(y_k < \xi_p < y_l)$ ஆகிய இரு, ஒன்றை யொன்று விலக்கும், நிகழ்ச்சிகளின் சேர்ந்த நிகழ்ச்சியாகும்.

எனவே,

$$P_r(y_k < \xi_p) = P_r(y_l \leq \xi_p) + P_r(y_k < \xi_p < y_l)$$

அதாவது,

$$P_r(y_k < \xi_p < y_l) = P_r(y_k < \xi_p) - P_r(y_l < \xi_p)$$

$$= \sum_{r=k}^{l-1} \frac{n!}{r!\,(n-r)!}\, p^r (1-p)^{n-r}$$

ஆகும். n, k, l, p ஆகியவைகளின் மதிப்புகள் தெரியுமிடத்து, இச்சமன்பாட்டின் வலதுபுறக் கோவையின் மதிப்பைப் பெறுகிறோம். இதை β எனக் குறிப்பிடுவோம்.

இப்போது, X-மாறியின் p-வது பகுதிமானம், இடைவெளி (y_k, y_l)-இல் அமைவதற்கான நிகழ்தகவு β என்கிறோம். Y_k, Y_l மாறிகளின் கண்டறிந்த மதிப்புகள் முறையே y_k, y_l எனில் இடைவெளி (y_k, y_l) யானது, p-வது பகுதிமானம் ξ_p-இன் 100β சதவீத நம்பிக்கை இடைவெளியாகும் என்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு

ஒரு தொடர்ச்சியான பரவலிலிருந்து 5 உறுப்புகளைச் சம வாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப் பட்டபோது, வரிசைக் கூறு அளவைகள் $Y_1 < Y_2 < Y_3 < Y_4 < Y_5$ எனக் கொள்க.

$$\text{(i) } P_r(Y_2 \le \xi_{0\cdot5}) = \sum_{r=2}^{5}\binom{5}{r}\left(\frac{1}{2}\right)^5 = 0\cdot81$$

$$\text{(ii) } P_r(Y_4 \le \xi_{0\cdot9}) = \sum_{r=4}^{5}\binom{5}{r}\left(\frac{9}{10}\right)^r\left(\frac{1}{10}\right)^{5-r} = 0\cdot92$$

$$\text{(iii) } P_r(Y_1 < \xi_{0\cdot5} < Y_5) = P_r(Y_1 < \xi_{0\cdot5}) - P_r(Y_5 < \xi_{0\cdot5})$$

$$= \sum_{r=1}^{5}\binom{5}{r}\left(\frac{1}{2}\right)^5 - \sum_{r=5}^{5}\binom{5}{r}\left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$= 0\cdot94$$

y_1, y_5 ஆகியவைகளின் கண்டறிந்த மதிப்புகள் முறையே 30, 46 எனில், $\xi_{0\cdot5}$-இன் 94 சதவீத நம்பிக்கை இடைவெளி (30, 46) ஆகும்.

கணக்கு

ஒரு பள்ளியிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப் பட்ட 20 மாணவர்கள் ஓர் உளவியல் சோதனையில் பெற்ற மதிப்பெண்கள் 119, 108, 111, 128, 112, 110, 129, 127, 123, 100, 115, 118, 117, 120, 126, 139, 114, 101, 124, 125 எனில், முழுமைத் தொகுதியின் இடை நிலைக்கான 90% நம்பிக்கை இடைவெளியைப் பெறுக.

முறை

கூறு உறுப்புகளின் மதிப்புகளை வரிசைப்படுத்தினால் 100, 101, 108, 110, 111, 112, 114, 115, 117, 118, 119, 120, 123, 124, 125, 126, 127 128, 129, 139. அவைகளை வரிசைக்கூறு அளவைகளாக Y-மாறி கொண்டு $Y_1 = 100$, $Y_2 = 101$, $Y_3 = 108$, ..., $Y_{19} = 129$, $y_{20} = 139$ குறிப்பிடுவோம்.

இப்போது முழுமைத் தொகுதியின் இடைநிலை, அதாவது 50 சதவீத பகுதி நம்பிக்கை இடைவெளி அமைக்க விழைவதால்

$p = 0{\cdot}50$ ஆக அமைகிறது. இடைநிலையை $\xi_{0\cdot50}$ எனக் குறிப்பிடுவோம். கூறின் உருவ அளவு $n = 9$, நம்பிக்கை இடைவெளியின் நம்பிக்கைக் கெழு 90% எனில்,

$$P_r\,(Y_7 < \xi_{0\cdot50} < Y_{14}) = \sum_{r=7}^{13} \binom{20}{r}\left(\frac{1}{2}\right)^{20} = 0{\cdot}8846$$

$$P_r\,(Y_6 < \xi_{0\cdot50} < Y_{14}) = \sum_{r\ \ 6}^{13} \binom{20}{r}\left(\frac{1}{2}\right)^{20} = 0{\cdot}9216$$

$$P_r\,(Y_5 < \xi_{0\cdot50} < Y_{18}) = \sum_{r=5}^{12} \binom{20}{r}\left(\frac{1}{2}\right)^{20} = 0.8625$$

ஆக அமைவதிலிருந்து, இடைநிலைக்கு ஏற்றதான நம்பிக்கை இடைவெளி $\frac{1}{6} < \xi_{0\cdot50} < \frac{1}{14}$

அதாவது, $112 < \xi_{0\cdot05} < 124$

எனப் பெறுகிறோம்.

ஒரு கூறு சோதனைகள் (One Sample Tests)

குறி சோதனை (Sign Test)

தொடர்ச்சியான மாறி X-ன் பரவல் சார்பு $F(x)$ எனவும், அதன் வடிவம், சுட்டுறுப்புகள் ஆகியன பற்றிய விவரங்கள் தெரியாது எனவும் கொள்வோம். $0 < p_0 < 1$ என அமைந்துள்ள நிலையெண் p_0, நிலையெண் a ஆகியன கொடுக்கப்படும்போது, X பரவலின் p_0-வது பகுதிமானத்தின் மதிப்பு a, அதாவது $F(a) = p_0$ எனக் கொள்ளலாமா என்பதை, X பரவலிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட சமவாய்ப்புக் கூறு $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ வாயிலாகச் சோதனை செய்வதாகக் கொள்வோம்.

(i) முதலில், X பரவலின் p_0-வது பகுதிமானத்தின் மதிப்பு a-ஆக அமைகிறது, அதாவது, $F(a) = p_0$ எனும் சூனிய எடுகோள் H_0-ஐயும் $F(a) > p_0$ எனும் மாற்று எடுகோளையும் அமைத்துக் கொள்வோம்.

அடுத்து, சமவாய்ப்புக் கூறு உறுப்புகளில் a மதிப்புக்குக் கூடுதலாக உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையை, அதாவது, $(X_1 - a)$, $(X_2 - a)$, ..., $(X_n - a)$ ஆகிய n விலக்கங்களில் மிகை

மதிப்பைப் பெறும் விலக்கங்களின் எண்ணிக்கையான Y-மாறியைக் கூறு அளவையாக அமைத்துக் கொள்வோம்.

சூனிய எடுகோள் உண்மையாயிருப்பின், Y-மாறியானது n, p_o ஆகியவைகளைச் சுட்டுறுப்புக்களாகக் கொண்ட ஈருறுப்புப் பரவலாகும்.

இப்போது, மிகை முழு எண் C, கீழ்க்கண்ட நிபந்தனைக்கு உட்படுமெனில்

$$P_r(Y \geq C \mid H_o) = \sum_{r=c}^{n} \binom{n}{r} p_o^{\,r} (1-p_o)^{n-r}$$

$$\leq \alpha \quad , \quad 0 < \alpha < 1$$

சோதனைக்கு ஏற்ற தீர்வு கட்டமான வெளி

$$R = \{ C, C+1, C+2, \ldots, n \}$$

என அமைத்துக் கொள்கிறோம். சோதனைக் கூறு அளவை Y-இன் கண்டறிந்த மதிப்பு y எனக் கொள்ளும்போது, $y \in R$ எனில், சூனிய எடுகோள் மறுக்கத்தக்கது எனவும், $y \notin R$ எனும்போது சூனிய எடுகோள் மறுக்கத்தகாதது எனவும் உய்த்துணருகிறோம்.

(ii) இப்போது மாற்று எடுகோள் $F(a) < p_o$ எனக் கொள்ளும்போது, தீர்வு கட்டமான வெளி

$$S = \{ 0, 1, 2, \ldots, (d-1), d \}$$

ஆகும். இங்கு மிகை முழு எண் d-ஆனது,

$$P_r^{*}(Y \leq d \mid H_o) = \sum_{r=o}^{d} \binom{n}{r} p^{o\,r} (1-p_o)^{n-r}$$

$$\leq \alpha, \qquad 0 < \alpha < 1$$

என்ற நிபந்தனைக்கு உட்பட்டு அமைகிறது.

சோதனை கூறு அளவை Y-இன் கண்டறிந்த மதிப்பு y எனக் கொள்ளும்போது, $y \in S$ எனில் சூனிய எடுகோள் மறுக்கத் தக்கது எனவும், $y \notin S$ எனில் சூனிய எடுகோள் மறுக்கத்தகாதது எனவும் உய்த்துணருகிறோம்.

(iii) மாற்று எடுகோள் $F(a) \neq p_o$ எனில், தீர்வு கட்டமான வெளி

$$T = \{ C_1, C_1 + 1, \ldots, n \} \cup \{ 0, 1, 2, \ldots, (d_1 - 1), d_1 \}$$

ஆகும். இங்கு C_1, d_1 ஆகிய மிகை முழு எண்கள்

$$P_r (Y > C_1 \text{ or } Y \leq d_1 \mid H_0)$$
$$= P_r (Y \geq C_1 \mid H_0) + P_r (Y \leq d_1 \mid H_0)$$
$$\leq \alpha$$

எனும் நிபந்தனைக்கு உட்படுகின்றன.

சோதனை கூறு அளவை Y-ன் கண்டறிந்த மதிப்பு y எனக் கொள்ளும்போது, $y \in T$ எனில், சூனிய எடுகோள் மறுக்கத் தக்கது என்றும், $y \notin T$ எனில், சூனிய எடுகோள் மறுக்கத்தகாதது எனவும் உய்த்துணருகிறோம்.

கணக்கு

X-மாறியின் பரவலிலிருந்து பெற்ற சமவாய்ப்புக் கூறு உறுப்புகளின் கண்டறிந்த மதிப்புகள், 104, 83, 115, 68, 94, 72, 112, 90, 140, 101 எனக் கொள்க. இவைகள் வாயிலாக, X மாறியின் இடைநிலை மதிப்பு 75 ஆக அமையுமா அல்லது 75-க்குக் கூடுதலாக அமையுமா என்பதை 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்க.

முறை

X-மாறியின் இடைநிலை மதிப்பு 75 ஆக அமைகிறது என சூனிய எடுகோளையும், அது 75-க்குக் கூடுதலாக அமைகிறது என மாற்று எடுகோளையும் எடுத்துக் கொள்வோம்.

இப்போது, கொடுக்கப்பட்ட 10 கூறு உறுப்புக்களில் 75-க்குக் கூடுதலாக மதிப்பு பெற்றுள்ள உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கை Y-ஐக் கூறு அளவையாக அமைப்போம். சூனிய எடுகோள் உண்மையாயின், Y மாறி, $p_0 = \frac{1}{2}$, $n = 10$ ஆகிய சுட்டுறுப்புக்களைக் கொண்ட ஈருறுப்பு மாறியாகும்.

மிகைத்தன்மை மட்டம் $\alpha = 0{\cdot}05$ என்பதால்,

$$P_r (Y \geq C) = \sum_{r=c}^{10} \binom{10}{r} \left(\frac{1}{2}\right)^r \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{10-r} \leq 0{\cdot}05$$

என்ற நிபந்தனைக்கு உட்படும்படியான மிகை முழு எண் $C = 8$ எனப் பெறுகிறோம். எனவே, சோதனைக்கு ஏற்றதான தீர்வுகட்டமான வெளி

$$R = \{ 8, 9, 10 \}$$

ஆகும்.

இப்போது, சோதனை கூறு அளவை Y-இன் கண்டறிந்த மதிப்பு $y=8$ ஆகும். இது தீர்வு கட்டமான பகுதி R-இல் அடங்கியிருப்பதால், சோதனை எடுகோள் மறுக்கத்தக்கது என்கிறோம். அதாவது, X-மாறியின் இடைநிலை மதிப்பு 75 ஆக அமைகிறது என்பது மறுக்கத் தக்கது என, 5 சதவீத மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் உய்த்துணருகிறோம்.

இரு கூறு சோதனைகள் (Two Sample Tests)

ஒரு தொடர்ச்சியான மாறி X-ன் பரவல் சார்பு $F_X(t)$ எனவும், மற்றொரு தொடர்ச்சியான மாறி Y-ன் பரவல் சார்பு $G_Y(t)$ எனவும் கொள்வோம். இப்போது X, Y ஆகிய இருமாறிகளின் பரவல்களும் சமமாக,

$$F_X(t) = G_Y(t) \quad , \quad -\infty < t < \infty$$

என அமைகின்றனவா எனச் சோதனை செய்யும் வழிமுறையைப் பற்றி காண்போம்.

இடை நிலை சோதனை (Median Test)

X, Y ஆகிய இரு மாறிகளும் சமமாகும் எனும் சூனிய எடுகோளை அமைத்துக் கொள்வோம். இப்போது X பரவலிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்படும் சமவாய்ப்புக் கூறு $x_1, x_2, \ldots, x_m$ எனவும், Y பரவலிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்படும் சமவாய்ப்புக் கூறு $y_1, y_2, \ldots, y_n$ எனவும் கொள்வோம். இவ்விரு கூறுகளையும் ஒன்று சேர்த்து ஒரு குழுவாகக் கொண்டு இதில் அடங்கியுள்ள $(m+n)$ மாறிகளின் இடைநிலை M-ஐப் பெறுவோம். இப்போது இடைநிலை M-க்குக் குறைவாக உள்ள X கூறு உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கையை V எனக் குறிப்பிட்டுப் பெறும் விவரங்களைக் கீழ்க்கண்ட இருவழிப் பட்டியலில் அமைப்போம்.

	X	Y	மொத்தம்
இடைநிலை Mக்குக் குறைவான உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கை	V	$r-V$	r
இடைநிலை Mக்குக் கூடுதலான உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கை	$m-V$	$n-r+V$	$m+n-r$
மொத்தம்	m	n	$m+n$

இங்கு,

$$r = \frac{m+n+1}{2}, \quad (m+n) \text{ ஆனது ஒற்றைப்படை மதிப்பெனில்}$$

$$= \frac{m+n}{2}, \quad (m+n) \text{ ஆனது இரட்டைப்படை மதிப்பெனில்}$$

ஆகும்.

சூனிய எடுகோள் உண்மையாயின், அதாவது $F_x(t) = G_x(t)$ என அமையின் கூறு அளவை V-ன் நிகழ்தகவுப் பரவலானது,

$$P_r(V=x) = \frac{\binom{m}{n}\binom{n}{r-x}}{\binom{m+n}{r}}, \quad v = 0, 1, \ldots, m$$

$$= 0, \qquad \text{மற்றபடி}$$

எனும் அதிபெருக்கற் பரவலாக அமைகிறது.

குறிப்பு : V மாறியின் நிகழ்தகவுச் சார்பில் இடம் பெறும் கோவை $\binom{n}{r-x}$-ன் மதிப்பு கீழ்க்கண்டவாறு அமைகிறது.

$$\binom{n}{r-x} = 0, \qquad r-x < 0$$

$$= 0, \qquad r-x > n$$

$$= \frac{n!}{(r-x)!\,(n-r+x)!}, \quad 0 \leq r-x \leq n$$

எனக் கொள்ளவேண்டும்.

(i) சூனிய எடுகோளுக்கு எதிராக $F_x(t) > G_x(t)$ என மாற்றுக்கோளை எடுத்துக் கொள்ளும்போது சோதனைக்கு ஏற்றதான தீர்வு கட்டமான வெளி R-ஐ

$$R = \{c, c+1, \ldots, (m-1), m\}$$

என அமைக்கிறோம். இங்கு மிகையெண் 'C' ஆனது கீழ்க்கண்ட நிபந்தனைக்கு

$$\sum_{x=c}^{m} p_r(V=x) \leq \alpha, \qquad 0 < \alpha < 1$$

உட்பட்டமையும்.

சோதனைக் கூறு அளவை V-ன் கண்டறிந்த மதிப்பு 'v' எனக் கொள்வோம். அப்போது $v \in R$ எனில், சூனிய எடுகோள் மறுக்கத்தக்கதெனவும், $v \notin R$ எனில், சூனிய எடுகோள் மறுக்கத்தகாதது எனவும் உய்த்துணருகிறோம்.

(ii) சூனிய எடுகோளுக்கெதிராக, $F_x(t) < G_x(t)$ என மாற்று எடுகோளை எடுத்துக் கொள்ளும்போது, சோதனைக்கு ஏற்றதான தீர்வு கட்டமான வெளி R-ஐ,

$$R = \{ 0, 1, 2, \dots, (d-1), d \}$$

என அமைக்கிறோம். இங்கு மிகையெண் d ஆனது கீழ்க்கண்ட நிபந்தனைக்கு

$$\sum_{x=0}^{d} P_r(r = x) \le \alpha, \quad 0 < \alpha < 1$$

உட்பட்டு அமைகிறது.

சோதனைக் கூறு அளவை V-ன் கண்டறிந்த மதிப்பு 'v' எனக் கொள்வோம். அப்போது $v \in R$ எனில், சூனிய எடுகோள் மறுக்கத் தக்கதெனவும், $v \notin R$ எனில், சூனிய எடுகோள் மறுக்கத்தகாதது எனவும் உய்த்துணருகிறோம்.

(iii) சூனிய எடுகோளுக்கெதிராக, $F_x(t) \neq G_x(t)$ என மாற்று எடுகோளை அமைக்கும்போது, சோதனைக்கு ஏற்றதான தீர்வு கட்டமான வெளி R-ஐ,

$$R = \{ 0, 1, \dots, d_1 - 1, d_1 \} \cup \{ c_1, c_1 + 1 \dots, (m-1), m \}$$

என அமைக்கிறோம். இங்கு c_1, d_1 ஆகியவைகள்

$$\sum_{x=0}^{d_1} p_r(V = x) \le \frac{\alpha}{2}; \qquad \sum_{x=c_1}^{m} p_r(V = x) \le \frac{\alpha}{2}$$

எனும் நிபந்தனைகளுக்குட்பட்டு அமைகின்றன.

சோதனைக் கூறு அளவை V-ன் கண்டறிந்த மதிப்பு v எனக் கொள்வோம்.

$v \in R$ எனில், சூனிய எடுகோள் மறுக்கத்தக்கது எனவும்,

$v \notin R$ எனில், சூனிய எடுகோள் மறுக்கத்தகாதது எனவும் உய்த்துணருகிறோம்.

இப்போது கூறுமாறிகளின் எண்ணிக்கை m, n ஆகியன பெரு மதிப்புடையன எனில், கூறு அளவை V-ன் உருமாற்றிய மாறி Z-யை,

$$Z = \frac{V - E(V)}{\sigma_V}$$

எடுத்துக் கொள்கிறோம்.

இங்கு $$E(V) = \frac{mr}{m+n}$$

$$\sigma_v^2 = \frac{r.m.n(m+n-r)}{(m+n)^2 \cdot (m+n-1)}$$

சூனிய எடுகோள் உண்மையாயின் Z-மாறியின் அணுகுநிலைப் பரவலானது திட்ட இயல்நிலைப் பரவலாக அமைகிறது. எனவே, Z-மாறியின் வாயிலாகச் சோதனையை மேற்கொண்டு உய்த்துணருகிறோம்.

ஒரு படித்தான 8 சிறுவர்கள், 12 சிறுமிகள் ஆகியவர்களின் ஆக்கிரமிப்புத்தன்மைக்கான மதிப்பெண்கள் பின்வருமாறு:

சிறுவர்கள் : 21, 18, 66, 8, 35, 16, 10, 41

சிறுமிகள் : 27, 17, 140, 112, 104, 117, 23, 51, 56, 42, 46, 57.

இவ்விவரங்கள் வாயிலாகச் சிறுவர், சிறுமிகள் ஆக்கிரமிப்புத் தன்மை குறித்து வேறுபட்டுள்ளனரா என இடைநிலைச் சோதனை வாயிலாக 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சிறுவர்கள், சிறுமியர் ஆக்கிரப்புத் தன்மை மதிப்பெண்களின் பரவல் சார்புகளை முறையே $F_X(t)$, $G_Y(t)$ எனக்கொள்வோம். சூனிய எடுகோளின் கீழ் சிறுவர், சிறுமிகள் ஆக்கிரமிப்புத்தன்மை குறித்து வேறுபடவில்லை, அதாவது, $F_X(t) = G_Y(t)$ எனவும், மாற்று எடுகோளின் கீழ் சிறுவர், சிறுமிகள் ஆக்கிரமிப்புத்தன்மை குறித்து வேறுபடுகின்றனர், அதாவது, $F_X(t) \neq G_Y(t)$ எனவும் அமைத்துக் கொள்கிறோம்.

இப்போது சிறுவர்களின் மதிப்பெண்களை X மாறிகொண்டும், சிறுமிகளின் மதிப்பெண்களை Y மாறி கொண்டும் குறிப்பிடுவோம். X, Y மாறிகளின் கண்டறிந்த மதிப்புகளை ஒரு குழுவாகக் கொண்டு ஏறுவரிசையில் வரிசைப்படுத்தி அமைப்போம்.

x_4, x_7, x_6, y_2, x_2, x_1, y_7, y_1, x_5, x_8, y_{10}, y_{11}, y_8, y_9, y_{12}, x_3, y_5, y_4, y_6, y_3

இவ்வரிசைப்படுத்திய தொடரிலிருந்து குழுவின் இடைநிலை

$$\frac{x_8 + y_{10}}{2} = \frac{41 + 42}{2} = 41 \cdot 5$$

எனப்பெற்று கீழ்க்கண்ட இருவழிப் பட்டியலை அமைக்கிறோம்.

	சிறுவர்கள்	சிறுமிகள்	மொத்தம்
இடைநிலை 41·5 மதிப்புக்குக் குறைவான உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	$V = 7$	$r - V = 3$	$r = 10$
இடைநிலை 41·5 மதிப்புக்குக் கூடுதலான உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	$m - V = 1$	$n - r + V = 9$	$m + n - r = 10$
மொத்தம்	$m = 8$	$n = 12$	$m + n = 20$

சோதனைக்கூறு அளவை V-ன் மதிப்பு 7 ஆகும். மாற்று எடுகோளின்கீழ் $F_x(t) \neq G_y(t)$ எனவும், மிகைத்தன்மை மட்டம் 5% எனவும் எடுத்துக் கொள்வதால் சோதனைக்கு ஏற்றதான தீர்வு கட்டமான வெளி R ஆனது,

$$R = \{ l, l + 1, \ldots\ldots, a \} \cup \{ 0, 1, \ldots\ldots, K \}$$

கீழ்க்கண்ட நிபந்தனை

$$P_r(V \leq K) = 0 \cdot 025$$
$$P_r(V \geq l) = 0 \cdot 025$$

உட்பட்டு அமையுமெனில், அதிபெருக்கப் பரவல் மதிப்புகளைக் கொண்டு $l = 7$, $K = 2$ எனப் பெறுகிறோம். எனவே சோதனைக் கேற்றதான தீர்வுகட்டமான வெளி $R = \{0, 1\} \cup \{7, 8\}$ ஆகும். இப்போது கூறு அளவையின் கண்டறிந்த மதிப்பு 7 ஆனது தீர்வு கட்டமான வெளியில் உள்ளடங்கியிருப்பதால் சோதனை எடுகோள் மறுக்கத்தக்கதென உய்த்துணருகிறோம். எனவே கொடுக்கப்பட்ட கூறுவிவரங்கள் வாயிலாகச் சிறுவர், சிறுமிகள் ஆக்கிரமிப்புத் தன்மையைக் குறித்து வேறுபட்டு அமைகின்றன என 5% மிகைத் தன்மை மட்டத்தில் உய்த்துணருகிறோம்.

கணக்கு

A வகை உரத்தை 20 பாத்திகளிலும், *B* வகை உரத்தை 15 பாத்திகளிலும் பயன்படுத்திய போது விளைந்த கோதுமை (கிலோ கிராம்களில்) பற்றிய விவரங்கள் பின்வருமாறு :

A : 138, 103, 116, 121, 149, 117, 121, 109, 141, 138, 125, 112, 133, 114, 138, 120, 119, 113, 132, 133.

B : 130, 83, 148, 144, 95, 119, 82, 96, 109, 85, 150, 73, 92, 144, 111.

இவ்விவரங்களைக் கொண்டு *A* வகை உரமானது *B* வகை உரத்தைவிடக் கூடுதலாக விளைச்சலைக் கொடுக்கிறதா என இடைநிலைச் சோதனை வாயிலாக 5 சதவீத மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் ஆய்க.

முறை

A வகை உரம் பெற்ற பாத்திகளின் விளைச்சல் மதிப்புகளை *X* மாறி கொண்டும், *B* வகை உரம் பெற்ற பாத்திகளின் விளைச்சல் மதிப்புகளை *Y* மாறி கொண்டும் குறிப்பிடுவோம். *X*, *Y* ஆகிய மாறிகளின் பரவல் சார்புகள் முறையே $F_X(t)$, $G_Y(t)$ எனக் கொள்வோமெனில், சூனிய எடுகோளின் கீழ் $F_X(t) = G_Y(t)$, $-\infty < t < \infty$ எனவும், மாற்று எடுகோளின்கீழ் $F_X(t) < G_Y(t)$ எனவும் அமைப்போம். இப்போது, *X*, *Y* ஆகியவைகளின் கண்டறிந்த மதிப்புகளை ஒரு குழுவாகக்கொண்டு அவைகளை ஏறு வரிசையில் வரிசைப்படுத்தி அமைப்போம்.

y_{12} y_7 y_2 y_{10} y_{13} y_5 y_8 x_2 y_9 x_8 y_{15} x_{12}
x_{18} x_{14} x_3 x_6 x_{17} y_6 x_{16} x_7 x_4 x_{11} y_1 x_{19}
x_{13} x_{20} x_{15} x_1 x_{10} x_9 y_4 y_{14} y_3 x_5 y_{11}

(இங்கு சம மதிப்புடைய விளைச்சல் விவரங்களை ராண்டம் எண்கள் பட்டியல் வாயிலாக வரிசைப்படுத்தி யுள்ளோம்.)

இவ்வரிசைப்படுத்திய தொடரிலிருந்து குழுவின் இடைநிலை $y_6 = 119$ எனப் பெற்று கீழ்க்கண்ட இருவழிப் பட்டியலை அமைக்கிறோம்.

	X கூறு	Y கூறு	மொத்தம்
இடைநிலை 119 மதிப்புக்குக் குறைவான உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	$V = 8$	$r - V = 10$	$r = 18$
இடைநிலை 119 மதிப்புக்குக் கூடுதலான உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	$m - V = 12$	$n - r + V = 5$	$m + n - r = 17$
மொத்தம்	$m = 20$	$n = 15$	$m + n = 35$

சோதனை கூறு அளவை V-ன் மதிப்பு 8 ஆகும். கூறு உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை பெருமதிப்புடையதால் கூறு அளவை V-ன் எதிர் பார்க்கும் மதிப்பு, திட்ட விலக்கம்

$$E(V) = \frac{m\,r}{m + n} = \frac{20 \times 18}{35} = 10{\cdot}3$$

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{r\,m\,n\,(m + n - r)}{(m+n)^2\,(m+n-1)}} = \sqrt{\frac{18 \times 20 \times 15 \times 17}{35 \times 35 \times 34}}$$

$$= 1{\cdot}49$$

ஆகியவைகளைக் கணக்கிடுவோம்.

இப்போது V-ன் கண்டறிந்த மதிப்பு 8 ஆனது, $E(V) = 10{\cdot}3$ மதிப்புக்குக் குறைவாக இருப்பதால் யேட்ஸின் திருத்தத்துடன் கூடிய V-ன் உருமாற்றிய மாறி Z-ன் மதிப்பை

$$Z = \frac{V + \frac{1}{2} - E(V)}{\sigma_v}$$

$$= \frac{8{\cdot}0 + 0{\cdot}5 - 10{\cdot}3}{1{\cdot}49} = -1{\cdot}21$$

கணக்கிடுகிறோம்.

சூனிய எடுகோள் உண்மையாயின், Z-மாறியின் அணுகுகோடு பரவலானது திட்ட இயல்நிலைப் பரவலாக அமைகிறது. மாற்று எடுகோளின் கீழ் $F_X(t) < G_Y(t)$ ஆகவும், மிகைத்தன்மை மட்டம் $0{\cdot}05$ ஆகவும் கொள்வதால் சோதனைக்கு ஏற்றதான தீர்வு கட்டமான வெளி

$$R = \{ x : -\infty < x < -1{\cdot}65 \}$$

ஆகும்.

சோதனைக் கூறு அளவை V-ன் உருமாற்றிய மாறி Z-ன் மதிப்பு $-1 \cdot 21$ ஆனது, தீர்வு கட்டமான வெளியில் அடங்கியிராததால், சூனிய எடுகோள் மறுக்கத்தகாதது என உய்த்துணருகிறோம். எனவே, கொடுக்கப்பட்ட கூறு விவரங்களிலிருந்து A வகை உரமானது B வகை உரத்தைவிடக் கூடுதலாக விளைச்சலைக் கொடுக்கிறதில்லை என 5 சதவீத மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் உய்த்துணருகிறோம்.

மேன்-விட்னி-வில்காக்சன் சோதனை

இரு தொடர்ச்சியான ராண்டம் மாறிகளின் பரவல் சார்புகள் சமமாக அமைகின்றனவா எனச் சோதனை செய்யப் பயனுறும் மேன்-விட்னி-வில்காக்சன் சோதனையைப் பற்றி இப்போது காண்போம்.

$x_1, x_2, \ldots, x_m$ ஆகியன X மாறியின் சமவாய்ப்புக் கூறு எனவும், $y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n$ ஆகியன Y மாறியின் சமவாய்ப்புக் கூறு எனவும் கொள்வோம். இப்போது Z மாறிகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு

$$\begin{aligned} Z_{ij} &= 1, \quad X_i < Y_j \\ &= 0, \quad X_i > Y_j \end{aligned}$$

எடுத்துக்கொண்டு கூறு அளவை U-ஐ

$$U = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} Z_{ij}$$

வரையறை செய்கிறோம்.

இக்கூறு அளவையைக் கீழ்க்கண்டவாறும் அமைக்கலாம்.

X பரவலிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்படும் $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_m$ கிய சமவாய்ப்புக் கூறுமாறிகளையும், Y பரவலிலிருந்து தேர்ந் தடுக்கப்படும் $y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n$ ஆகிய சமவாய்ப்புக் கூறு மாறிகளையும் ஒரு குழுவாகக் கொண்டு அவைகளை ஏறு வரிசையில் வரிசைப்படுத்தி, i-வது இடத்தில் அமையும் உறுப்பின் தரத்தை 'i' எனக் குறிப்பிடுகிறோம். இங்கு $i = 1, 2, \ldots\ldots, (m+n)$ ஆகும்.

இப்போது இந்த வரிசையில் அமைந்துள்ள Y பரவல் மாறிகளின் தரங்களின் கூட்டுத் தொகையை T எனக் குறிப்பிடும்போது கூறு அளவை U ஆனது,

$$U = T - \frac{n(n+1)}{2}$$

என அமைகிறது.

கூறு அளவை U ஏற்றுக்கொள்ளும் மதிப்புகள் அடங்கிய கணம் $S = \{0, 1, 2, \ldots\ldots, mn\}$ ஆகும்.

X, Y ஆகிய மாறிகளின் பரவல் சார்பு சமமாக அமையும் போது, m, n ஆகியவைகளின் பல்வேறு மதிப்புக்களுக்கு இணையான U-மாறியின் நிகழ்தகவுப் பரவலை H. B. மேன், W. R. விட்னி, F. வில்காக்சன் ஆகிய புள்ளியியல் வல்லுநர்கள் பட்டியலில் அளித்துள்ளார்கள்.

இப்போது X, Y ஆகிய மாறிகளின் பரவல் சார்புகள் சமம்

$$F_x(t) = G_y(t), \quad -\infty < t < \infty$$

என சூனிய எடுகோளையும், அதற்கு எதிராக

$$F_x(t) > G_y(t)$$

என மாற்று எடுகோளையும் அமைப்போமேயானல், சோதனைக்கு ஏற்றதான தீர்வு கட்டமான வெளி

$$R = \{c, c+1, \ldots\ldots, mn\}$$

ஆகும். இங்கு மிகை முழு எண் 'C' கீழ்க்கண்ட நிபந்தனைக்கு

$$\sum_{x=c}^{mn} P_r\,(U = x \,/\, F_x(t) = G_y(t)) \leq \alpha, \quad 0 < \alpha < 1$$

உட்பட்டு அமைகிறது.

கூறு அளவை U-ன் கண்டறிந்த மதிப்பு 'u' எனக் கொள்வோம். $u \in R$ எனில், சூனிய எடுகோள் மறுக்கத்தக்கதெனவும், $u \notin R$ எனில் சூனிய எடுகோள் மறுக்கத்தகாது எனவும் உய்த்துணருகிறோம்.

இப்போது கூறு உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை m, n ஆகியன பெருமதிப்புடையன எனில்,

கூறு அளவை U-ன் உருமாற்றிய மாறி Z-யை

$$Z = \frac{U - E(U)}{\sigma_u}$$

எடுத்துக் கொள்கிறோம். இங்கு,

$$E(U) = \frac{mn}{2},$$

$$\sigma_u^2 = \frac{mn(m+n+1)}{12}$$ ஆகும்.

சூனிய எடுகோள் உண்மையாயின் Z மாறியின் அணுகுகோடு பரவலானது திட்ட இயல்நிலைப் பரவலாக அமைகிறது. எனவே, சோதனைக்கு ஏற்றதான தீர்வு கட்டமான வெளியாக இடைவெளி (k, ∞)-ஐ

$$\int_{K}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \alpha \quad , \qquad 0 < \alpha < 1$$

எனும் படியாக அமைத்துக் கொள்கிறோம். U மாறியின் கண்டறிந்த மதிப்பு 'u' எனில், Z மாறியின் மதிப்பு

$$z = \frac{u - E(U)}{\sigma_u}$$

ஆகும். இப்போது $z \in (k, \infty)$ எனில், சூனிய எடுகோள் மறுக்கத்தக்கதெனவும், $z \notin (k, \infty)$ எனில், சூனிய எடுகோள் மறுக்கத்தகாதெனவும் உய்த்துணருகிறோம்.

அடுத்து,

$$F_x(t) = G_y(t) \, , \quad -\infty < t < \infty$$

எனும் சூனிய எடுகோளுக்கு எதிராக,

$$F_x(t) < G_x(t)$$

எனும் மாற்று எடுகோளை எடுத்துக் கொள்ளும் போது, தீர்வு கட்டமான வெளி R-ஐ,

$$R = \{0, 1, 2, \ldots, d\}$$

ஆக அமைத்துச் சோதனையை மேற்கொள்கிறோம். இவ்விடத்து மிகை முழு எண் d ஆனது கீழ்க்கண்ட நிபந்தனைக்கு,

$$\sum_{x=0}^{d} P_r\left(U = x / F_x(t) = G_x(t)\right) \leq \alpha$$

உட்பட்டு அமைகிறது.

அடுத்து,

$$F_x(t) = G_y(t) \, , \quad -\infty \leq t \leq \infty$$

எனும் சூனிய எடுகோளுக்கு எதிராக

$$F_x(t) \neq G_y(t) \quad , \quad -\infty \leq t \leq \infty$$

எனும் மாற்று எடுகோளை எடுத்துக் கொள்ளும்போது,

தீர்வு கட்டமான வெளி R-ஐ,

$$R = \{ 0, 1, 2, ..., d_1 \} \cup \{ c_1, c_1 + 1, ..., mn \}$$

ஆக அமைத்துச் சோதனையை மேற்கொள்கிறோம். இங்கு மிகை முழு எண்கள் c_1, d_1 ஆகியன கீழ்க்கண்ட நிபந்தனைகட்கு

$$\sum_{x = c_1}^{mn} P_r (U = x/F_x (t) = G_y (t)) \leq \frac{\alpha}{2}$$

$$\sum_{x = 0}^{d_1} P_r (U = x/F_x (t) = G_y (t)) \leq \frac{\alpha}{2}, \qquad 0 < \alpha < 1$$

உட்பட்டு அமைகிறது.

இப்போது இப்புத்தகத்தின் பின்னிணைப்பில் கொடுக்கப் பட்டுள்ள மேன்-விட்னி-வில்காக்சன் சோதனைக்கான நிகழ்தகவுப் புள்ளி அட்டவணைப் பட்டியலைப் பயன்படுத்தும் முறையைப் பற்றி விளக்குவோம்.

மேன்-விட்னி-வில்காக்சன் இருகூறு சோதனைக்கான கூறு அளவை U-ன் நிகழ்தகவுத் திணிவுப் பரவல்

$$P_r (U = x) > 0, \qquad x \in \{ 0, 1, 2, ..., mn \}$$
$$= 0, \qquad \text{மற்றபடி}$$

ஆகும். சூனிய எடுகோள்

$$F_x (t) = G_x (t), \quad - \infty < t < \infty$$

எனில், U-ன் பரவல் $x = \frac{mn}{2}$ புள்ளியைக் குறித்துச் சமச்சீராக அமைகிறது.

ஆகவே, K ஒரு மிகையெண் எனக் கொள்ளும் போது

$$P_r [U \leq K] = P_r [U \geq mn - K]$$

என அமைகிறது.

இப்போது, $m = 1, 2, ..., 20$, $n = 1, 2, ..., 20$ ஆகிய மதிப்புகளுக்கு இணையான K-ன் மதிப்புகள் கீழ்க்கண்ட நிபந்தனைக்கு

$$P_r \; [U \leq K] \leq \alpha, \quad \alpha = 0{\cdot}01, 0{\cdot}05$$

உட்படும்படி பட்டியல் 9-(a), 9-(b) ஆகியவைகளிலும்,

$$P_r (U \leq K) \leq \alpha/2$$

உட்படும்படி பட்டியல் 9-(*c*), 9-(*d*) ஆகியவைகளிலும் கொடுக்கப் பட்டுள்ளன. இவைகளின் வாயிலாக, $K^1 = (mn - K)$-ன் மதிப்பு களைக் கீழ்க்கண்ட நிபந்தனைக்கு

$$P_r \ (U \geq K^1) \leq a_1$$

உட்படும்படி பெறுகிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு (1)

$m = 6$, $n = 9$, $\alpha = 0{\cdot}01$ ஆகியவைகளுக்கு இணையான K-ன் மதிப்பு '7' எனப் பட்டியல் 5-இலிருந்து பெறுகிறோம்.

ஆதலால்,

$$P_r \ (U \leq 7) \leq 0{\cdot}01$$

ஆகும். இப்போது,

$$P_r \ (U \leq 7) = P_r \ [U \geq 54 - 7]$$

ஆக அமைவதால்,

$$P_r \ [U \geq 47) \leq 0{\cdot}01$$

ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு (2)

$m = 11$, $n = 8$, $\alpha = 0{\cdot}05$ ஆகியவைகளுக்கு இணையான K-ன் மதிப்பு 20 எனப் பட்டியல் 5-இலிருந்து பெறுகிறோம்.

ஆதலால்,

$$P_r \ (U \leq 20) \leq 0{\cdot}05$$

ஆகும். இப்போது,

$$P_r \ (U \leq 20) = P_r \ (U \geq 88 - 20)$$

ஆக அமைவதால்,

$$P_r \ (U \geq 68) \leq 0{\cdot}05$$

ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு (3) (Two sided table)

$m = 6$, $n = 9$, $\alpha = 0{\cdot}01$ ஆகியவைகளுக்கு இணையான K-ன் மதிப்பு '5' எனப் பட்டியல் '*C*' இலிருந்து பெறுகிறோம். ஆதலால்,

$$P_r \ (U \leq 5) \leq 0{\cdot}005$$

ஆகும்.

இப்போது,

$$P_r (U \leq 5) = P_r (U \geq 54-5)$$

ஆக அமைவதால்,

$$P_r (U \geq 49) \leq 0{\cdot}005$$

ஆகும். எனவே,

$$m = 6,\ n = 9,\ \alpha = 0{\cdot}01,$$

சூனிய எடுகோள் $F_x(t) = G(t)$

மாற்று எடுகோள் $F_x(t) \neq G(t)$

ஆகியவைகள் கொடுக்கப்பட்டு, சோதனை அளவை U-ஐ எடுத்துக் கொள்ளும்போது தீர்வு கட்டமான வெளி

$$R = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{49, 50, 51, 52, 53, 54\}$$

ஆக அமைகிறது.

கணக்கு

ஒரே படித்தான 11 சிறுவர்களில் 6 சிறுவர்களுக்குப் பயிற்சி கொடுக்கப்படுகிறது. மற்றவர்களுக்கு அப்பயிற்சி கொடுக்கப்படவில்லை எனக் கொள்க. பயிற்சிக்குப் பிறகு நடைபெற்ற நுண்ணறிவுச சோதனையில் சிறுவர்கள் பெற்ற கீழ்க்கண்ட மதிப்பெண்கள் வாயிலாக, பயிற்சியானது நுண்ணறிவைக் கூடுதலாக்குகிறதா என்பதை 5% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்க.

பயிற்சி பெறுதவர்கள் 98, 101, 102, 105, 110, 111.

பயிற்சி பெற்றவர்கள் 108, 112, 114, 120, 126.

முறை

பயிற்சிபெறுத சிறுவர்களின் மதிப்பெண்களை $X_1 = 98$, $X_2 = 101$, $X_3 = 102$, $X_4 = 105$, $X_5 = 110$, $X_6 = 111$ எனவும், இக்கூறு பிறந்த முழுமைப் பரவல் சார்பு $F_x(t)$ எனவும், பயிற்சி பெற்ற சிறுவர்களின் மதிப்பெண்களை $Y_1 = 108$, $Y_2 = 112$, $Y_3 = 114$, $Y_4 = 120$, $Y_5 = 126$ எனவும், இக்கூறு பிறந்த முழுமைத் தொகுதியின் பரவல் சார்பு $G_y(t)$ எனவும் குறியீடுகளால் குறிப்பிடுவோம்.

இப்போது
$$Z_{ij} = 1,\quad X_i < Y_j$$
$$= 0,\quad X_i > Y_j$$
$$i = 1, 2, \ldots\ldots, 6,\quad j = 1, 2, \ldots\ldots, 5$$

ஆகிய மாறிகளின் மதிப்புகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு பெற்று,

	$Y_1=108$	$Y_2=112$	$Y_3=114$	$Y_4=120$	$Y_5=126$
$X_1 = 98$	1	1	1	1	1
$X_2 = 101$	1	1	1	1	1
$X_3 = 102$	1	1	1	1	1
$X_4 = 105$	1	1	1	1	1
$X_5 = 110$	0	1	1	1	1
$X_6 = 111$	0	1	1	1	1

கூறு அளவை U-ஐ

$$U = \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{5} Z_{ij}$$
$$= 28$$

எனக் கணக்கிடுகிறோம்.

கூறு அளவை U-ஐக் கணக்கிட மற்றொரு வழி பின்வருமாறு:

X கூறு மாறிகள், Y கூறு மாறிகள் ஆகியவைகளை ஒரு குழுவாகக் கொண்டு ஏறு வரிசையில் வரிசைப்படுத்தி அதில் Y மாறிகளின் தரத்தைக் குறிப்பிடு. பயிற்சியானது நுண்ணறிவைக் கூடுதலாக்கவில்லை.

98, 101, 102, 105, <u>108</u>, 110, 111, <u>112</u>, <u>114</u>, <u>120</u>, <u>126</u>

இங்கு அடியில் கோடிட்ட மதிப்பெண்கள் X-கூறுமாறிகளாகின்றன. இவைகளின் தரங்களின் கூடுதல்

$$T = 5 + 8 + 9 + 10 + 11$$
$$= 43$$

ஆகும்.

இப்போது கூறு அளவை U

$$U = T - \frac{n(n+1)}{2}$$
$$= 43 - 15$$
$$= 28$$

ஆக அமைகிறது.

$$F_x(t) = G_y(t), \qquad -\infty > t < \infty$$

எனும் கணிய எடுகோளையும் பயிற்சியானது நுண்ணறிவைக் கூடுதலாக்குகிறது.

அதாவது,

$$F_x(t) < G_y(t)$$

எனும் மாற்று எடுகோளையும் அமைத்துக் கொள்வோம். மிகைத் தன்மை மட்டம் 5% எனும்போது சோதனைக்கு ஏற்றதான தீர்வு கட்டமான வெளி R-ஆனது

$$R = \{ c, c+1, \ldots\ldots, mn \}$$

கீழ்க்கண்ட

$$P_r \{ U \in R / F_x(t) = G_y(t) \} \leq 0{\cdot}05$$

உட்பட்டு அமையும்போது, மேன்-விட்னி-வில்காக்சன் சோதனைக் கான நிகழ்தகவுப் புள்ளி அட்டவணையிலிருந்து $m = 6$, $n = 5$ ஆகியவைகளுக்கு இணையாக, $C = 5$ எனப் பெறுகிறோம்.

இப்போது

$P_r(U \geq mn - 5) = P_r(U \leq 5)$ என அமைவதால், $P_r(U \geq 25) \leq 0{\cdot}05$ எனப் பெறுகிறோம். எனவே, சோதனைக்கு ஏற்றதான தீர்வுகட்டமான வெளி

$$R = \{25, 26, 27, 28, 29, 30\}$$

ஆகும்.

+

கணக்கு

X, Y ஆகிய இரு பரவல்களிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட சம வாய்ப்புக் கூறு மதிப்புகள் பின் வருமாறு :

X ; 17, 73, 85, 43, 36, 21, 0, 35, 50, 32, 75, 21, 78, 92, 70, 80, 84, 55, 42, 72, 86, 50, 69, 55, 94.

Y : 14, 26, 84, 15, 92, 60, 26, 86, 48, 28, 4, 39, 8, 6, 32, 42, 49, 59, 45, 34, 44, 61, 74, 66, 99.

இவ்விவரங்களைக் கொண்டு மேன்-விட்னி-வில்காக்சன் சோதனை வாயிலாக X, Y ஆகிய இரு மாறிகள் சமமாகுமா என 10% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் சோதனை செய்க.

முறை

X, Y மாறிகளின் பரவல் சார்புகளை முறையே $F_x(t)$, $G_y(t)$ எனக் குறிப்பிடுவோம்.

சூனிய எடுகோளின் கீழ் $F_x(t) = G_y(t)$ எனவும்,

மாற்று எடுகோளின் கீழ் $F_x(t) \neq G_y(t)$ எனவும் அமைப்போம்.

X, Y ஆகிய இரு பரவல்களிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட கூறு மதிப்புகளை ஒரு குழுவாகக்கொண்டு ஏறு வரிசையில் வரிசைப் படுத்துவோம். (இங்கு சமமதிப்புகளை ராண்டம் எண்கள் பட்டியலைக் கொண்டு வரிசைப்படுத்துவோம்.)

$0, \underline{4}, \underline{6}, \underline{8}, \underline{14}, \underline{15}, 17, 21, 21, \underline{26}, \underline{26}, \underline{28}, \underline{32},$

$32, \underline{34}, 35, 36, \underline{39}, \underline{42}, 42, 43, \underline{44}, \underline{45}, \underline{48}, \underline{49}, 50,$

$50, 55, 55, \underline{59}, \underline{60}, \underline{61}, \underline{66}, 69, 70, 72, 73, \underline{74}, 75,$

$78, \underline{79}, 80, \underline{84}, 84, 85, \underline{86}, 86, \underline{92}, 92, 94.$

இவ்வரிசைப் படுத்திய மதிப்புகளில் கீழ்க் கோடிடப்பட்டவைகள் Y கூறு மதிப்புகளாகின்றன. இவைகளின் தரமதிப்புகளின் கூடுதலை

$$\begin{aligned} T &= 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 10.5 + 10.5 + 12 + 13 + 15 + 18 + 19.5 + 22 + 23 + 24 + 25 + 30 + 31 + \\ &\quad 32 + 33 + 38 + 41 + 43.5 + 46.5 + 48.5 \\ &= 556.00 \end{aligned}$$

கணக்கிடுகிறோம்.

இப்போது கூறு அளவை U-ன் மதிப்பு

$$\begin{aligned} U &= T - \frac{n(n+1)}{2} \\ &= 556 - 325 \\ &= 231 \end{aligned}$$

ஆகும்.

கூறு உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை பெருமதிப்புடையதால் கூறு அளவை U-ன் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு, திட்டவிலக்கம்

$$E(V) = \frac{mn}{2} = \frac{25 \times 25}{2} = 312.5$$

$$\sigma_u = \sqrt{\frac{mn(m \quad n+1)}{}} = \sqrt{\frac{25 \times 25 \times 51}{2}} = 126{\cdot}25$$

ஆகியவைகளைக் கணக்கிடுகிறோம்.

இப்போது U-ன் கண்டறிந்த மதிப்பு 234 ஆனது $E(U) = 312{\cdot}5$ மதிப்புக்குக் குறைவாக இருப்பதால் யேட்ஸின் திருத்தத்துடன் கூடிய U-ன் உருமாற்றிய மாறி Z-ன் மதிப்பை

$$Z = \frac{U + \frac{1}{2} - E(V)}{\sigma_V}$$

$$= \frac{231{\cdot}5 - 312{\cdot}5}{126{\cdot}25} = -0{\cdot}64$$

கணக்கிடுகிறோம்.

சூனிய எடுகோள் உண்மையாயின் Z-மாறியின் அணுகு கோடு பரவலானது திட்ட இயல்நிலைப் பரவலாக அமைகிறது. மாற்று எடுகோளின் கீழ் $F_X(t) \neq G_Y(t)$ ஆகவும், மிகைத்தன்மை மட்டம் 10% ஆகவும் கொள்வதால், சோதனைக்கு ஏற்றதான தீர்வு கட்டமான வெளி

$$R = \{x : -\infty < x \leq -1{\cdot}96\} \cup \{x : 1{\cdot}96 \leq x < \infty\}$$

ஆகும்.

சோதனைக் கூறு அளவை U-ன் உருமாற்றிய மாறி Z-ன் மதிப்பு $-0{\cdot}62$ ஆனது தீர்வு கட்டமான வெளியில் அடங்கியிராததால் சூனிய எடுகோள் மறுக்கத்தகாதது என உய்த்துணருகிறோம். எனவே, கொடுக்கப்பட்ட கூறு விவரங்களிலிருந்து X, Y ஆகிய இருமாறிகள் சமமாக அமைகின்றன என 10% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் உய்த்துணருகிறோம்.

ஓட்ட சோதனை (Run Test)

ஒரு தொடர்ச்சியான ராண்டம் மாறி X-ன் பரவலிலிருந்து பெற்ற சம வாய்ப்புக் கூறு மாறிகளின் கண்டறிந்த மதிப்புக்கள், 126, 108, 120, 90, 96 எனவும், மற்றொரு தொடர்ச்சியான மாறி Y-ன் பரவலிலிருந்து பெற்ற சம வாய்ப்புக் கூறு மாறிகளின் கண்டறிந்த மதிப்புக்கள் 111, 119, 100, 113, 109, 114 எனவும் கொள்வோம். இவ்விரு கூறு உறுப்புகளின் மதிப்புகளையும் ஒரு குழுவாகக் கொண்டு, அவைகளை ஏறு வரிசையில் வரிசைப் படுத்தி அமைப்போம். இவ்வரிசையில் இடம் பெறும் ஒவ்வொரு மதிப்பை

யும் அது X பரவலின் உறுப்பாயின் x எனவும், Y பரவலின் உறுப்பாயின் y எனவும்,

$$\begin{array}{ccccccccccc} 90, & 96, & 100, & 108, & 109, & 111, & 113, & 114, & 119, & 120, & 126 \\ \underline{x} & \underline{x} & \underline{y} & \underline{x} & \underline{y} & \underline{y} & \underline{y} & \underline{y} & \underline{y} & \underline{x} & \underline{x} \end{array}$$

குறியீடு கொண்டு குறிப்போம்.

இப்போது இந்த வரிசைத் தொடரில் முதலிரு இடங்களில் தொடர்ச்சியாக X மாறியின் மதிப்புக்கள் உள்ளதால் இவைகள் x-ஓட்டத்தையும், மூன்றுவது இடத்தில் Y மாறியின் மதிப்பு தனித்து உள்ளதால் y-ஓட்டத்தையும், நான்காவது இடத்தில் X மாறியின் மதிப்பு தனித்து உள்ளதால் இது x-ஓட்டத்தையும், ஐந்தாவது, ஆறுவது, ஏழாவது, எட்டாவது, ஒன்பதாவது ஆகிய இடங்களில் தொடர்ச்சியாக Y மாறியின் மதிப்புக்கள் உள்ளதால் இவைகள் y-ஓட்டத்தையும், பத்தாவது, பதினொன்றுவது ஆகிய இடங்களில் தொடர்ச்சியாக X-மாறிகள் உள்ளதால் x-ஓட்டத்தையும் ஏற்படுத்துகின்றன எனக் குறிக்கிறோம். இங்கு ஏற்பட்டுள்ள மொத்த ஓட்டங்களின் எண்ணிக்கை 5 ஆகும்.

இப்போது X பரவலிலிருந்து 3 உறுப்புகளையும். Y பரவலிலிருந்து 2 உறுப்புகளையும் சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுத்து அவைகளை ஒரு குழுவாகக் கொண்டு ஏறு வரிசையில் வரிசைப் படுத்தி அமைக்கும்போது ஏற்படும் மொத்த ஓட்டங்களின் எண்ணிக்கை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

ஏறு வரிசை அமைப்பு	மொத்த ஓட்டங்களின் எண்ணிக்கை
$x\ x\ x\ y\ y$	2
$y\ y\ x\ x\ x$	2
$y\ x\ x\ x\ y$	3
$x\ x\ y\ y\ x$	3
$x\ y\ y\ x\ x$	3
$x\ x\ y\ x\ y$	4
$x\ y\ x\ x\ y$	4
$y\ x\ x\ y\ x$	4
$x\ y\ x\ y\ x$	[illegible]

இப்போது இரு தொடர்ச்சியான ராண்டம் மாறிகளின் பரவல் சார்புகள் சமமாக அமைகின்றன எனச் சோதனை செய்யப் பயனுறும் ஓட்ட சோதனையைப் பற்றி காண்போம்.

X பரவலிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்படும் $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ஆகிய சமவாய்ப்புக் கூறு மாறிகளையும், Y பரவலிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்படும் $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ஆகிய சமவாய்ப்புக் கூறுமாறிகளையும் ஒரு குழுவாகக் கொண்டு ஏறு வரிசையில் வரிசைப்படுத்தி ஏற்படும் மொத்த ஓட்டங்களை 'W' மாறி எனக் குறிப்பிடுக.

இப்போது $m = n$ எனில், $m = a$ எனக் குறிப்போம். W மாறி ஏற்கும் மதிப்புகள் அடங்கிய கணம்

$S = \{2, 3, \ldots, 2a\}$ ஆகும்.

$m \neq n$ எனில் m, n ஆகியவைகளின் சிறுமத்தை 'a' எனக் குறிப்போம். W மாறி ஏற்கும் மதிப்புகள் அடங்கிய கணம் $S = \{2, 3, \ldots, 2a + 1\}$ ஆகும்.

X, Y மாறிகளின் பரவல் சார்பு சமம்.

$$F_x(t) = G_x(t), \qquad -\infty < t < \infty$$

எனில், W மாறியின் நிகழ்தகவு

$$P_r(W = 2k+1)$$

$$= \frac{\binom{m-1}{k}\binom{n-1}{k-1} + \binom{m-1}{k-1}\binom{n-1}{k}}{\binom{m+n}{m}}, \quad k = 0, 1, \ldots, a$$

$$P_r(W = 2k)$$

$$= \frac{2\binom{m-1}{k-1}\binom{n-1}{k-1}}{\binom{m+n}{m}}, \quad k = 1, 2, \ldots, a$$

ஆக அமைகின்றன.

இப்போது, $F_x(t) = G_x(t), \quad -\infty < t < \infty$

என சூனிய எடுகோளையும், இதற்கு எதிராக

$$F_x(t) \neq G_x(t)$$

என மாற்று எடுகோளையும் அமைத்துக் கொள்வோமெனில் சோதனைக் கேற்றதாய் தீர்வு கட்டமான வெளி

$$R = \{2, 3, \ldots, (c-1), c\} \text{ ஆகும்.}$$

இங்கு மிகை முழு எண் ‘c’ ஆனது கீழ்க்கண்ட நிபந்தனைக்கு

$$\sum_{x=2}^{c} P_t(W = x) \leq \alpha, \quad 0 < \alpha < 1$$

உட்பட்டு அமைகிறது. கூறு அளவை W-ன் கண்டறிந்த மதிப்பு w எனக் கொள்வோம். $w \in R$ எனில், சூனிய எடுகோள் மறுக்கத்தக்கதெனவும், $w \notin R$ எனில் சூனிய எடுகோள் மறுக்கத்தகாதெனவும் உய்த்துணருகிறோம்.

இப்போது, கூறு உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை m, n ஆகியன பெரு மதிப்புடையன வெனில், கூறு அளவை W-ன் உருமாற்ற மாறி Z-ஐ

$$Z = \frac{W - E(W)}{\sigma_w}$$

என எடுத்துக் கோள்வோம். இங்கு

$$E(W) = \mu = \frac{2mn}{(m+1)} + 1$$

$$\sigma_w^2 = \frac{(\mu - 1)(\mu - 2)}{(m+n-1)}$$

ஆகும்.

சூனிய எடுகோள் உண்மையாயின் Z மாறியின் அணுகுகோடு பரவலானது திட்ட இயல் நிலை பரவலாக அமைகிறது. எனவே, சோதனைக்கு ஏற்றதான தீர்வு கட்டம் இடைவெளி $(-\infty, u)$-ஐ,

$$\int_{-\infty}^{u} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = \alpha, \quad 0 < \alpha < 1$$

எனும்படி அமைத்துக் கொள்கிறோம். W மாறியின் கண்டறிந்த மதிப்பு w எனில், Z மாறியின் மதிப்பு

$$z = \frac{w - E(W)}{\sigma_w}$$

ஆகும்.

இப்போது $z \in (-\infty, u)$ எனில், சூனிய எடுகோள் மறுக்கத்தக்கதெனவும், $z \notin (-\infty, u)$ எனில் சூனிய எடுகோள் மறுக்கத்தகாதெனவும் உய்த்துணருகிறோம்.

ஓட்ட சோதனை

கணக்கு

X, Y ஆகிய இரு மாறிகளின் பரவலிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப் பட்ட கூறு மதிப்புகள் பின்வருமாறு:

X : 12·6, 18·4, 12·5, 42·6, 89·6, 26·1, 14·3, 91·4

Y : 34·6, 31·9, 26·6, 28·9, 41·5, 29·8

இக்கூறு விவரங்களைக்கொண்டு ஓட்ட சோதனை வாயிலாக X, Y மாறிகளின் பரவல்கள் சமமாகுமா என்பதை 1% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் ஆய்க.

முறை

X, Y மாறிகளின் பரவல்கள் சமமாகும் எனும் சூனிய எடுகோளையும், அவைகள் சமமில்லை எனும் மாற்று எடுகோளை யும் அமைத்துக்கொள்வோம்.

X, Y ஆகிய மாறிகளின் கண்டறிந்த மதிப்புகளை ஒரு குழு வாகக்கொண்டு ஏறுவரிசையில் அமைத்து மொத்த ஓட்டங்களின்

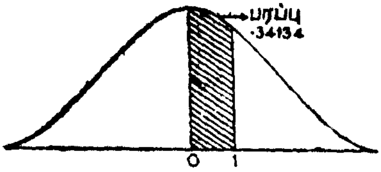
$$\underline{x_3\ x_1\ x_7\ x_2\ x_6} \qquad \underline{y_3\ y_4\ y_2\ y_1\ y_5\ y_6}$$

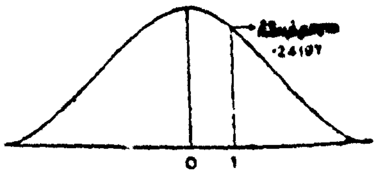
$$\underline{x_4\ x_5\ x_8}$$

எண்ணிக்கை 3 எனப் பெறுகிறோம்.

மிகைத்தன்மை மட்டம் 1% என்பதால் சோதனைக்கேற்றதான தீர்வுகட்டமான வெளி $R = \{3, 2\}$ என ஓட்ட சோதனை அட்டவணையிலிருந்து பெறுகிறோம். இப்பொழுது கண்டறிந்த ஓட்டங்களின் எண்ணிக்கை 3ஆனது தீர்வுகட்டமான வெளியில் உள்ளடங்கியிருப்பதால் சோதனை எடுகோள் மறுக்கத்தக்கதென உய்த்துணருகிறோம். எனவே, கொடுக்கப்பட்ட கூறு விவரங்கள் வாயிலாக X, Y மாறிகளின் பரவல்கள் சமமாக அமையவில்லை என 1% மிகைத்தன்மை மட்டத்தில் உய்த்துணருகிறோம்.

அட்டவணை—1





இயல்நிலைப் பரவல் — நிலைத்தூரமும், பரப்பும்

t	நிலைத் தூரம்	பரப்பு	t	நிலைத் தூரம்	பரப்பு	t	நிலைத் தூரம்	பரப்பு
.00	.39894	.00000	.35	.37524	.13683	.70	.31225	.25804
.01	.39892	.00399	.36	.37391	.14058	.71	.31006	.26115
.02	.39886	.00798	.37	.37255	.14431	.72	.30785	.26424
.03	.39876	.01197	.38	.37115	.14803	.73	.30563	.26730
.04	.39862	.01595	.39	.36973	.15173	.74	.30339	.27035
.05	.39844	.01994	.40	.36827	.15542	.75	.30114	.27337
.06	.39822	.02392	.41	.36678	.15910	.76	.29887	.27637
.07	.39797	.02790	.42	.36526	.16276	.77	.29659	.27935
.08	.39767	.03188	.43	.36371	.16640	.78	.29431	.28230
.09	.39733	.03586	.44	.36213	.17003	.79	.29200	.28524
.10	.39695	.03983	.45	.36053	.17364	.80	.28969	.28814
.11	.39654	.04380	.46	.35889	.17724	.81	.28737	.29103
.12	.39608	.04776	.47	.35723	.18082	.82	.28504	.29389
.13	.39559	.05172	.48	.35553	.18439	.83	.28269	.29673
.14	.39505	.05567	.49	.35381	.18793	.84	.28034	.29955
.15	.39448	.05962	.50	.35207	.19146	.85	.27798	.30234
.16	.39387	.06356	.51	.35029	.19497	.86	.27562	.30511
.17	.39322	.06749	.52	.34849	.19847	.87	.27324	.30785
.18	.39253	.07142	.53	.34667	.20194	.88	.27086	.31057
.19	.39181	.07535	.54	.34482	.20540	.89	.26848	.31327
.20	.39104	.07926	.55	.34294	.20884	.90	.26609	.31594
.21	.39024	.08317	.56	.34105	.21226	.91	.26369	.31859
.22	.38940	.08706	.57	.33912	.21566	.92	.26129	.32121
.23	.38853	.09095	.58	.33718	.21904	.93	.25888	.32381
.24	.38762	.09483	.59	.33521	.22240	.94	.25647	.32639
.25	.38667	.09871	.60	.33322	.22575	.95	.25406	.32894
.26	.38568	.10257	.61	.33121	.22907	.96	.25164	.33147
.27	.38466	.10642	.62	.32918	.23237	.97	.24923	.33398
.28	.38361	.11026	.63	.32713	.23565	.98	.24681	.33646
.29	.38251	.11409	.64	.32506	.23891	.99	.24439	.33891
.30	.38139	.11791	.65	.32297	.24215	1.00	.24197	.34134
.31	.38023	.12172	.66	.32086	.24537	1.01	.23955	.34375
.32	.37903	.12552	.67	.31874	.24857	1.02	.23713	.34614
.33	.37780	.12930	.68	.31659	.25175	1.03	.23471	.34850
.34	.37654	.13307	.69	.31443	.25490	1.04	.23230	.35083

இயல்நிலைப் பரவல் – நிலைத்தூரமும், பரப்பும் [தொடர்ச்சி]

t	நிலைத் தூரம்	பரப்பு	t	நிலைத் தூரம்	பரப்பு	t	நிலைத் தூரம்	பரப்பு
1.05	.22988	.35314	1.50	.12952	.43319	1.95	.05959	.47441
1.06	.22747	.35543	1.51	.12758	.43448	1.96	.05844	.47500
1.07	.22506	.35769	1.52	.12566	.43574	1.97	.05730	.47558
1.08	.22265	.35993	1.53	.12376	.43699	1.98	.05618	.47615
1.09	.22025	.36214	1.54	.12188	.43822	1.99	.05508	.47670
1.10	.21785	.36433	1.55	.12001	.43943	2.00	.05399	.47725
1.11	.21546	.36650	1.56	.11816	.44062	2.01	.05292	.47778
1.12	.21307	.36864	1.57	.11632	.44179	2.02	.05186	.47831
1.13	.21069	.37076	1.58	.11450	.44295	2.03	.05082	.47882
1.14	.20831	.37286	1.59	.11270	.44408	2.04	.04980	.47932
1.15	.20594	.37493	1.60	.11092	.44520	2.05	.04879	.47982
1.16	.20357	.37698	1.61	.10915	.44630	2.06	.04780	.48030
1.17	.20121	.37900	1.62	.10741	.44738	2.07	.04682	.48077
1.18	.19886	.38100	1.63	.10567	.44845	2.08	.04586	.48124
1.19	.19652	.38298	1.64	.10396	.44950	2.09	.04491	.48169
1.20	.19419	.38493	1.65	.10226	.45053	2.10	.04398	.48214
1.21	.19186	.38686	1.66	.10059	.45154	2.11	.04307	.48257
1.22	.18954	.38877	1.67	.09893	.45254	2.12	.04217	.48300
1.23	.18724	.39065	1.68	.09728	.45352	2.13	.04128	.48341
1.24	.18494	.39251	1.69	.09566	.45449	2.14	.04041	.48382
1.25	.18265	.39435	1.70	.09405	.45543	2.15	.03955	.48422
1.26	.18037	.39617	1.71	.09246	.45637	2.16	.03871	.48461
1.27	.17810	.39796	1.72	.09089	.45728	2.17	.03788	.48500
1.28	.17585	.39973	1.73	.08933	.45818	2.18	.03706	.48537
1.29	.17360	.40147	1.74	.08780	.45907	2.19	.03626	.48574
1.30	.17137	.40320	1.75	.08628	.45994	2.20	.03547	.48610
1.31	.16915	.40490	1.76	.08478	.46080	2.21	.03470	.48645
1.32	.16694	.40658	1.77	.08329	.46164	2.22	.03394	.48679
1.33	.16474	.40824	1.78	.08183	.46246	2.23	.03319	.48713
1.34	.16256	.40988	1.79	.08038	.46327	2.24	.03246	.48745
1.35	.16038	.41149	1.80	.07895	.46407	2.25	.03174	.48778
1.36	.15822	.41309	1.81	.07754	.46485	2.26	.03103	.48809
1.37	.15608	.41466	1.82	.07614	.46562	2.27	.03034	.48840
1.38	.15395	.41621	1.83	.07477	.46638	2.28	.02965	.48870
1.39	.15183	.41774	1.84	.07341	.46712	2.29	.02898	.48899
1.40	.14973	.41924	1.85	.07206	.46784	2.30	.02833	.48928
1.41	.14764	.42073	1.86	.07074	.46856	2.31	.02768	.48956
1.42	.14556	.42220	1.87	.06943	.46926	2.32	.02705	.48983
1.43	.14350	.42364	1.88	.06814	.46995	2.33	.02643	.49016
1.44	.14146	.42507	1.89	.06687	.47062	2.34	.02582	.49036
1.45	.13943	.42647	1.90	.06562	.47128	2.35	.02522	.49061
1.46	.13742	.42786	1.91	.06439	.47193	2.36	.02463	.49086
1.47	.13542	.42922	1.92	.06316	.47257	2.37	.02406	.49111
1.48	.13344	.43056	1.93	.06195	.47320	2.38	.02349	.49134
1.49	.13147	.43189	1.94	.06077	.47381	2.39	.02294	.49158

இயல்நிலைப் பரவல் – நிலைத்தூரமும், பரப்பும் [தொடர்ச்சி]

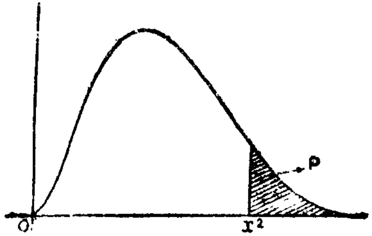
t	நிலைத் தூரம்	பரப்பு	t	நிலைத் தூரம்	பரப்பு	t	நிலைத் தூரம்	பரப்பு
2.40	.02239	.49180	2.85	.00687	.49781	3.30	.00172	.49952
2.41	.02186	.49202	2.86	.00668	.49788	3.31	.00167	.49953
2.42	.02134	.49224	2.87	.00649	.49795	3.32	.00161	.49955
2.43	.02083	.49245	2.88	.00631	.49801	3.33	.00156	.49957
2.44	.02033	.49266	2.89	.00613	.49807	3.34	.00151	.49958
2.45	.01984	.49286	2.90	.00595	.49813	3.35	.00146	.49960
2.46	.01936	.49305	2.91	.00578	.49819	3.36	.00141	.49961
2.47	.01889	.49324	2.92	.00562	.49825	3.37	.00136	.49962
2.48	.01842	.49343	2.93	.00545	.49831	3.38	.00132	.49964
2.49	.01797	.49361	2.94	.00530	.49836	3.39	.00127	.49965
2.50	.01753	.49379	2.95	.00514	.49841	3.40	.00123	.49966
2.51	.01709	.49396	2.96	.00499	.49846	3.41	.00119	.49968
2.52	.01667	.49413	2.97	.00485	.49851	3.42	.00115	.49969
2.53	.01625	.49430	2.98	.00471	.49856	3.43	.00111	.49970
2.54	.01585	.49446	2.99	.00457	.49861	3.44	.00107	.49971
2.55	.01545	.49461	3.00	.00443	.49865	3.45	.00104	.49972
2.56	.01506	.49477	3.01	.00430	.49869	3.46	.00100	.49973
2.57	.01468	.49492	3.02	.00417	.49874	3.47	.00097	.49974
2.58	.01431	.49506	3.03	.00405	.49878	3.48	.00094	.49975
2.59	.01394	.49520	3.04	.00393	.49882	3.49	.00090	.49976
2.60	.01358	.49534	3.05	.00381	.49886	3.50	.00087	.49977
2.61	.01323	.49547	3.06	.00370	.49883	3.51	.00084	.49978
2.62	.01289	.49560	3.07	.00358	.49893	2.52	.00081	.49978
2.63	.01256	.49573	3.08	.00348	.49897	3.53	.00079	.49979
2.64	.01223	.49585	3.09	.00337	.49900	3.54	.00076	.49980
2.65	.01191	.49598	3.10	.00327	.49903	3.55	.00073	.49981
2.66	.01160	.49609	3.11	.00317	.49906	3.56	.00071	.49981
2.67	.01130	.49621	3.12	.00307	.49910	3.57	.00068	.49982
2.68	.01100	.49632	3.13	.00298	.49913	3.58	.00066	.49983
2.69	.01071	.49643	3.14	.00288	.49916	3.59	.00063	.49983
2.70	.01042	.49653	3.15	.00279	.49918	3.60	.00061	.49984
2.71	.01014	.49664	3.16	.00271	.49921	3.61	.00059	.49985
2.72	.00987	.49674	3.17	.00262	.49924	3.62	.00057	.49985
2.73	.00961	.49683	3.18	.00254	.49926	3.63	.00055	.49986
2.74	.00935	.49693	3.19	.00246	.49929	3.64	.00053	.49986
2.75	.00909	.49702	3.20	.00238	.49931	3.65	.00051	.49987
2.76	.00885	.49711	3.21	.00231	.49934	3.66	.00049	.49987
2.77	.00861	.49720	3.22	.00224	.49936	3.67	.00047	.49988
2.78	.00837	.49728	3.23	.00216	.49938	3.68	.00046	.49988
2·79	.00814	.49736	3.24	.00210	.49940	3.69	.00044	.49989
2.80	.00792	.49744	3.25	.00203	.49942	3.70	.00042	.49989
2.81	.00770	.49752	3.26	.00196	.49944	3.71	.00041	.49990
2.82	.00748	.49760	3.27	.00190	.49946	3.72	.00039	.49990
2.83	.00727	.49767	3.28	.00184	.49948	3.73	.00038	.49990
2.84	.00707	.49774	3.29	.00178	.49950	3.74	.00037	.49991

இயல்நிலைப் பரவல் – நிலைத்தூரமும், பரப்பும் [தொடர்ச்சி]

t	நிலைத் தூரம்	பரப்பு	t	நிலைத் தூரம்	பரப்பு	t	நிலைத் தூரம்	பரப்பு
3.75	.00035	.49991	3.85	.00024	.49994	3.95	.00016	.49996
3.76	.00034	.49992	3.86	.00023	.49994	3.96	.00016	.49996
3.77	.00033	.49992	3.87	.00022	.49995	3.97	.00015	.49996
3.78	.00031	.49992	3.88	.00021	.49995	3.98	.00014	.49997
3.79	.00030	.49992	3.89	.00021	.49995	3.99	.00014	.49997
3.80	.00029	.49993	3.90	.00020	.49995			
3.81	.00028	.49993	3.91	.00019	.49995			
3.82	.00027	.49993	3.92	.00018	.49996			
3.83	.00026	.49994	3.93	.00018	.49996			
3.84	.00025	.49994	3.94	.00017	.49996			

அட்டவணை — 2

χ^2 — பரவல்



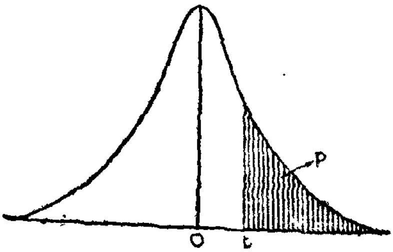
கட்டின்மைகள்	P = 0.99	0.98	0.95	0.90	0.80	0.70	0.50	0.30	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01
1	0.000157	0.000628	0.00393	0.0158	0.0642	0.148	0.455	1.074	1.642	2.706	3.841	5.412	6.635
2	0.0201	0.0404	0.103	0.221	0.446	0.713	1.386	2.408	3.219	4.605	5.991	7.824	9.210
3	0.115	0.185	0.352	0.584	1.005	1.424	2.366	3.665	4.642	6.251	7.815	9.837	11.341
4	0.297	0.429	0.711	1.064	1.649	2.195	3.357	4.878	5.989	7.779	9.488	11.668	13.277
5	0.554	0.752	1.145	1.610	2.343	3.000	4.351	6.064	7.289	9.236	11.070	13.388	15.086
6	0.872	1.134	1.635	2.204	3.070	3.828	5.348	7.231	8.558	10.645	12.592	15.033	16.812
7	1.239	1.564	2.167	2.833	3.822	4.671	6.346	8.383	9.803	12.017	14.067	16.622	18.475
8	1.646	2.032	2.733	3.490	4.594	5.527	7.344	9.524	11.030	13.362	15.507	18.168	20.090
9	2.088	2.532	3.325	4.168	5.380	6.393	8.343	10.656	12.242	14.684	16.919	19.679	21.666
10	2.558	3.059	3.940	4.865	6.179	7.267	9.342	11.781	13.442	15.987	18.307	21.161	23.209
11	3.053	3.609	4.575	5.578	6.989	8.148	10.341	12.899	14.631	17.275	19.675	22.618	24.725
12	3.571	4.178	5.226	6.304	7.807	9.034	11.340	14.011	15.812	18.549	21.026	24.054	26.217
13	4.107	4.765	5.892	7.042	8.634	9.926	12.340	15.119	16.985	19.812	22.362	25.472	27.688
14	4.660	5.368	6.571	7.790	9.467	10.821	13.339	16.222	18.151	21.064	23.685	26.873	29.141
15	5.229	5.985	7.261	8.547	10.307	11.721	14.339	17.322	19.311	22.307	24.996	28.259	30.578

16	5.812	6.614	7.962	9.312	11.152	12.624	15.338	18.418	20.465	23.542	26.296	29.633	32.000
17	6.408	7.255	8.672	10.085	12.002	13.531	16.338	19.511	21.615	24.769	27.587	30.995	33.409
18	7.015	7.906	9.390	10.865	12.857	14.440	17.338	20.601	22.760	28.989	28.869	32.346	31.805
19	7.633	8.567	10.117	11.651	13.716	15.352	18.338	21.689	23.900	27.204	30.144	33.687	36.191
20	8.260	9.237	10.851	12.443	14.578	16.266	19.337	22.775	25.038	28.412	31.410	35.020	37.566
21	8.897	9.915	11.591	13.240	15.445	17.182	20.337	23.858	26.171	29.615	32.671	36.343	38.932
22	9.542	10.600	12.338	14.041	16.314	18.101	21.337	24.939	27.301	30.813	33.924	37.659	40.289
23	10.196	11.293	13.091	14.848	17.187	19.021	22.337	26.018	28.429	32.007	35.172	38.968	41.638
24	10.856	11.992	13.848	15.659	18.062	19.943	23.337	27.096	29.553	33.196	36.415	40.270	42.980
25	11.524	12.697	14.611	16.473	18.940	20.867	24.337	28.172	30.675	34.382	37.652	41.566	44.314
26	12.198	13.409	15.379	17.292	19.820	21.792	25.336	29.246	31.795	35.563	38.885	42.856	45.642
27	12.879	14.125	16.151	18.114	20.703	22.719	26.336	30.319	32.912	36.741	40.113	44.140	46.963
28	13.565	14.847	16.928	18.939	21.588	23.647	27.336	31.391	34.027	37.916	41.337	45.419	48.278
29	14.256	15.574	17.708	19.786	22.475	24.577	28.336	32.461	35.139	39.087	42.557	46.693	49.588
30	14.953	16.306	18.493	20.599	23.364	25.508	29.336	33.530	36.250	40.256	43.773	47.962	50.892

For degrees of freedom greater than 30 the expression $\sqrt{2x^2} - \sqrt{2n' - 1}$ may be used as a normal deviate with unit variance, where n' is the number of degrees of freedom.

அட்டவணை—3

t - பரவல்



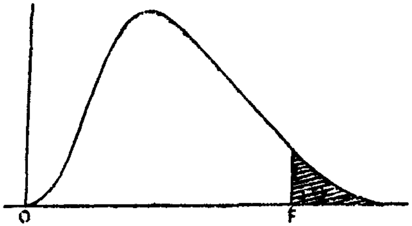
கட்டின்மைகள்	P = .005	.01	.025	.05	.1	.15
1	63.657	31.821	12.706	6.314	3.078	1.963
2	9.925	6.965	4.303	2.920	1.886	1.386
3	5.841	4.541	3.182	2.353	1.638	1.250
4	4.604	3.747	2.776	2.132	1.533	1.190
5	4.032	3.365	2.571	2.015	1.476	1.156
6	3.707	3.143	2.447	1.943	1.440	1.134
7	3.499	2.998	2.365	1.895	1.415	1.119
8	3.355	2.896	2.306	1.860	1.397	1.108
9	3.250	2.821	2.262	1.833	1.383	1.100
10	3.169	2.764	2.228	1.812	1.372	1.093
11	3.106	2.718	2.201	1.796	1.363	1.088
12	3.055	2.681	2.179	1.782	1.356	1.083
13	3.012	2.650	2.160	1.771	1.350	1.079
14	2.977	2.624	2.145	1.761	1.345	1.076
15	2.947	2.602	2.131	1.753	1.341	1.074
16	2.921	2.583	2.120	1.746	1.337	1.071
17	2.898	2.567	2.110	1.740	1.333	1.069
18	2.878	2.552	2.101	1.734	1.330	1.067
19	2.861	2.539	2.093	1.729	1.328	1.066
20	2.845	2.528	2.086	1.725	1.325	1.064
21	2.831	2.518	2.080	1.721	1.323	1.063
22	2.819	2.508	2.074	1.717	1.321	1.061
23	2.807	2.500	2.069	1.714	1.319	1.060
24	2.797	2.492	2.064	1.711	1.318	1.059
25	2.787	2.485	2.060	1.708	1.316	1.058
26	2.779	2.479	2.056	1.706	1.315	1.058
27	2.771	2.473	2.052	1.703	1.314	1.057
28	2.763	2.467	2.048	1.701	1.313	1.056
29	2.756	2.462	2.045	1.699	1.311	1.055
30	2.750	2.457	2.042	1.697	1.310	1.055
∞	2.576	2.326	1.960	1.645	1.282	1.036

t-பரவல் (தொடர்ச்சி)

கட்டின்மைகள்	P=.2	.25	.3	.35	.4	.45
1	1.376	1.000	.727	.510	.325	.158
2	1.061	.816	.617	.445	.289	.142
3	.978	.765	.584	.424	.277	.137
4	.941	.741	.569	.414	.271	.134
5	.920	.727	.559	.408	.267	.132
6	.906	.718	.553	.404	.265	.131
7	.896	.711	.549	.402	.263	.130
8	.889	.706	.546	.399	.262	.130
9	.883	.703	.543	.398	.261	.129
10	.879	.700	.542	.397	.260	.129
11	.876	.697	.540	.396	.260	.129
12	.873	.695	.539	.395	.259	.128
13	.870	.694	.538	.394	.259	.128
14	.868	.692	.537	.393	.258	.128
15	.866	.691	.536	.393	.258	.128
16	.865	.690	.535	.392	.258	.128
17	.863	.689	.534	.392	.257	.128
18	.862	.688	.534	.392	.257	.127
19	.861	.688	.533	.391	.257	.127
20	.860	.687	.533	.391	.257	.127
21	.859	.686	.532	.391	.257	.127
22	.858	.686	.532	.390	.256	.127
23	.858	.685	.532	.390	.256	.127
24	.857	.685	.531	.390	.256	.127
25	.856	.684	.531	.390	.256	.127
26	.856	.684	.531	.390	.256	.127
27	.855	.684	.531	.389	.256	.127
28	.855	.683	.530	.389	.256	.127
29	.854	.683	.530	.389	.256	127
30	.854	.683	.530	.389	.256	.127
∞	.842	.674	.524	.385	.253	.126

அட்டவணை - 4

F - பரவல்



5% (Roman Type - உரோமானிய முறை எழுத்து),
1% (Bold-face Type - கொட்டை எழுத்து) புள்ளிகள்.

சிறிய மாறுபாடுக்குரிய கட்டின்மைகள்	பெரிய மாறுபாடுக்குரிய கட்டின்மைகள் 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	161 **4052**	200 **4999**	216 **5403**	225 **5625**	230 **5764**	234 **5859**	237 **5928**	239 **5981**	241 **6022**	242 **6056**
2	18.51 **98.49**	19.00 **99.01**	19.16 **99.17**	19.25 **99.25**	19.30 **99.30**	19.33 **99.33**	19.36 **99.34**	19.37 **99.36**	19.38 **99.38**	19.39 **99.40**
3	10.13 **34.12**	9.55 **30.81**	9.28 **29.46**	9.12 **28.71**	9.01 **28.24**	8.94 **27.91**	8.88 **27.67**	8.84 **27.49**	8.81 **27.34**	8.78 **27.23**
4	7.71 **21.20**	6.94 **18.00**	6.59 **16.69**	6.39 **15.98**	6.26 **15.52**	6.16 **15.21**	6.09 **14.98**	6.04 **14.80**	6.00 **14.66**	5.96 **14.54**

5	6.61 **16.26**	5.79 **13.27**	5.41 **12.06**	5.19 **11.39**	5.05 **10.97**	4.95 **10.67**	4.88 **10.45**	4.82 **10.27**	4.78 **10.15**	4.74 **10.05**
6	5.99 **13.74**	5.14 **10.92**	4.76 **9.78**	4.53 **9.15**	4.39 **8.75**	4.28 **8.47**	4.21 **8.26**	4.15 **8.10**	4.10 **7.98**	4.06 **7.87**
7	5.59 **12.25**	4.74 **9.55**	4.35 **8.45**	4.12 **7.85**	3.97 **7.46**	3.87 **7.19**	3.79 **7.00**	3.73 **6.84**	3.68 **6.71**	3.63 **6.62**
8	5.32 **11.26**	4.46 **8.65**	4.07 **7.59**	3.84 **7.01**	3.69 **6.63**	3.58 **6.37**	3.50 **6.19**	3.44 **6.03**	3.39 **5.91**	3.34 **5.82**
9	5.12 **10.56**	4.26 **8.02**	3.86 **6.99**	3.63 **6.42**	3.48 **6.06**	3.37 **5.80**	3.29 **5.62**	3.23 **5.47**	3.18 **5.35**	3.13 **5.26**
10	4.96 **10.04**	4.10 **7.56**	3.71 **6.55**	3.48 **5.99**	3.33 **5.64**	3.22 **5.39**	3.14 **5.21**	3.07 **5.06**	3.02 **4.95**	2.97 **4.85**
11	4.84 **9.65**	3.98 **7.20**	3.59 **6.22**	3.36 **5.67**	3.20 **5.32**	3.09 **5.07**	3.01 **4.88**	2.95 **4.74**	2.90 **4.63**	2.86 **4.54**
12	4.75 **9.33**	3.88 **6.93**	3.49 **5.95**	3.26 **5.41**	3.11 **5.06**	3.00 **4.82**	2.92 **4.65**	2.85 **4.50**	2.80 **4.39**	2.76 **4.30**
13	4.67 **9.07**	3.80 **6.70**	3.41 **5.74**	3.18 **5.20**	3.02 **4.86**	2.92 **4.62**	2.84 **4.44**	2.77 **4.30**	2.72 **4.19**	2.67 **4.10**
14	4.60 **8.86**	3.74 **6.51**	3.34 **5.56**	3.11 **5.03**	2.96 **4.69**	2.85 **4.46**	2.77 **4.28**	2.70 **4.14**	2.65 **4.03**	2.60 **3.94**
15	4.54 **8.68**	3.68 **6.36**	3.29 **5.42**	3.06 **4.89**	2.90 **4.56**	2.79 **4.32**	2.70 **4.14**	2.64 **4.00**	2.59 **3.89**	2.55 **3.80**
16	4.49 **8.53**	3.63 **6.23**	3.24 **5.29**	3.01 **4.77**	2.85 **4.44**	2.74 **4.20**	2.66 **4.13**	2.59 **3.89**	2.54 **3.78**	2.49 **3.66**

F - பரவல்

5% (Roman Type–உரோமானிய முறை எழுத்து), 1% (Bold-face Type - கொட்டை எழுத்து) புள்ளிகள்.

பெரிய மாறுபாடுக்குரிய கட்டின்மைகள்

சிறிய மாறுபாட்டுக்குரிய கட்டின்மைகள்	11	12	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞
1.	243 / **6082**	244 / **6106**	245 / **6142**	246 / **6169**	248 / **6208**	249 / **6234**	250 / **6258**	251 / **6286**	252 / **6302**	253 / **6323**	253 / **6334**	254 / **6352**	254 / **6361**	254 / **6366**
2.	19.40 / **99.41**	19.41 / **99.42**	19.42 / **99.43**	19.43 / **99.44**	19.44 / **99.45**	19.45 / **99.46**	19.46 / **99.47**	19.47 / **99.48**	19.47 / **99.48**	19.48 / **99.49**	19.49 / **99.49**	19.49 / **99.49**	19.50 / **99.50**	19.50 / **99.50**
3.	8.76 / **27.13**	8.74 / **27.05**	8.71 / **26.92**	8.69 / **26.83**	8.66 / **26.69**	8.64 / **26.60**	8.62 / **26.50**	8.60 / **26.41**	8.58 / **26.30**	8.57 / **26.27**	8.56 / **26.23**	8.54 / **26.18**	8.54 / **26.14**	8.53 / **26.12**
4.	5.93 / **14.45**	5.91 / **14.37**	5.87 / **14.24**	5.84 / **14.15**	5.80 / **14.02**	5.77 / **13.93**	5.74 / **13.83**	5.71 / **13.74**	5.70 / **13.69**	5.68 / **13.61**	5.66 / **13.57**	5.65 / **13.52**	5.64 / **13.48**	5.63 / **13.46**
5.	4.70 / **9.96**	4.68 / **9.89**	4.64 / **9.77**	4.60 / **9.68**	4.56 / **9.55**	4.53 / **9.47**	4.50 / **9.38**	4.46 / **9.29**	4.44 / **9.24**	4.42 / **9.17**	4.40 / **9.13**	4.38 / **9.07**	4.37 / **9.04**	4.36 / **9.02**
6.	4.03 / **7.79**	4.00 / **7.72**	3.96 / **7.60**	3.92 / **7.52**	3.87 / **7.39**	3.84 / **7.31**	3.81 / **7.23**	3.77 / **7.14**	3.75 / **7.09**	3.72 / **7.02**	3.71 / **6.99**	3.69 / **6.94**	3.68 / **6.90**	3.67 / **6.88**
7.	3.60 / **6.54**	3.57 / **6.47**	3.52 / **6.35**	3.49 / **6.27**	3.44 / **6.15**	3.41 / **6.07**	3.38 / **5.98**	3.34 / **5.90**	3.32 / **5.85**	3.29 / **5.78**	3.28 / **5.75**	3.25 / **5.70**	3.24 / **5.67**	3.23 / **5.65**
8.	3.31 / **5.74**	3.28 / **5.67**	3.23 / **5.56**	3.20 / **5.48**	3.15 / **5.36**	3.12 / **5.28**	3.08 / **5.20**	3.05 / **5.11**	3.03 / **5.06**	3.00 / **5.00**	2.98 / **4.96**	2.96 / **4.91**	2.94 / **4.88**	2.93 / **4.86**

9.	3.10	3.07	3.02	2.98	2.93	2.90	2.86	2.82	2.80	2.77	2.76	2.73	2.72	2.71
	5.18	5.11	5.00	4.92	4.80	4.73	4.64	4.56	4.51	4.45	4.41	4.36	4.33	4.31
10.	2.94	2.91	2.86	2.82	2.77	2.74	2.70	2.67	2.64	2.61	2.59	2.56	2.55	2.54
	4.78	4.71	4.60	4.52	4.41	4.33	4.25	4.17	4.12	4.05	4.01	3.96	3.93	3.91
11.	2.82	2.79	2.74	2.70	2.65	2.61	2.57	2.53	2.50	2.47	2·45	2.42	2.41	2.40
	4.46	4.40	4.29	4.21	4.10	4.02	3.94	3.86	3.80	3.74	3.70	3.66	3.62	3.60
12.	2.72	2.69	2.64	2.60	2.54	2.50	2.46	2.42	2.40	2.36	2.35	2.32	2.31	2.30
	4.22	4.16	4.05	3.98	3.86	3.78	3.70	3.62	3.56	3.49	3.46	3.41	3.38	3.36
13.	2.63	2.60	2.55	2.51	2.46	2.42	2.38	2.34	2.32	2.28	2.26	2.24	2.22	2.21
	4.02	3.96	3.85	3.78	3·67	3.59	3.51	3.42	3.37	3.30	3.27	3.21	3.18	3.16
14.	2.56	2.53	2.48	2.44	2.39	2.35	2.31	2.27	2.24	2.21	2.19	2.16	2.14	2.13
	3.86	3.80	3.70	3.62	3.51	3.43	3.34	3.26	3.21	3.14	3.11	3.06	3.02	3.00
15.	2.51	2.48	2.43	2.39	2.33	2.29	2.25	2.21	2·18	2.15	2.12	2.10	2.08	2.07
	3.73	3.67	3.56	3.48	3.36	3.29	3.20	3·12	3.07	3.00	2.97	2.92	2.89	2.87
16.	2.45	2.42	2.37	2.33	2.28	2.24	2.20	2.16	2.13	2.09	2.07	2.04	2.02	2.01
	3.61	3.55	3.45	3.37	3.25	3.18	3.10	3.01	2.96	2.89	2.86	2.80	2.77	2.75

F — பரவல்

5% (Roman Type - உரோமானிய முறை எழுத்து),
1% (Bold-face Type - கொட்டை எழுத்து) புள்ளிகள்.

சிறிய மாறுபாட்டுக்குரிய கட்டின்மைகள்	பெரிய மாறுபாட்டுக்குரிய கட்டின்மைகள் 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
17	4.45 **8.40**	3.59 **6.11**	3.20 **5.18**	2.96 **4.67**	2.81 **4.34**	2.70 **4.10**	2.62 **3.93**	2.55 **3.79**	2.50 **3.68**	2.45 **3.59**
18	4.41 **8.28**	3.55 **6.01**	3.16 **5.09**	2.93 **4.58**	2.77 **4.25**	2.66 **4.01**	2.58 **3.85**	2.51 **3.71**	2.46 **3.60**	2.41 **3.51**
19	4.38 **8.18**	3.52 **5.93**	3.13 **5.01**	2.90 **4.50**	2.74 **4.17**	2.63 **3.94**	2.55 **3.77**	2.48 **3.63**	2.43 **3.52**	2.38 **3.43**
20	4.35 **8.10**	3.49 **5.85**	3.10 **4.94**	2.87 **4.43**	2.71 **4.10**	2.60 **3.87**	2.52 **3.71**	2.45 **3.56**	2.40 **3.45**	2.35 **3.37**
21	4.32 **8.02**	3·47 **5.78**	3.07 **4.87**	2.84 **4.37**	2.68 **4.04**	2.57 **3.81**	2.49 **3.65**	2.42 **3.51**	2.37 **3.40**	2.32 **3.31**

கூறிய மாதிரியாட்டுக்குரிய கட்டுண்மைகள்

22	4.30 **7.94**	3.44 **5.72**	3.05 **4.82**	2.82 **4.31**	2.66 **3.99**	2.55 **3.76**	2.47 **3.59**	2.40 **3.45**	2.35 **3.35**	2.30 **3.26**
23	4.28 **7.88**	3.42 **5.66**	3.03 **4.76**	2.80 **4.26**	2.64 **3.94**	2.53 **3.71**	2.45 **3.54**	2.38 **3.41**	2.32 **3.30**	2.28 **3.21**
24	4.26 **7.82**	3.40 **5.61**	3.01 **4.72**	2.78 **4.22**	2.62 **3.90**	2.51 **3.67**	2.43 **3.50**	2.36 **3.36**	2.30 **3.25**	2.26 **3.17**
25	4.24 **7.77**	3.38 **5.57**	2.99 **4.68**	2.76 **4.18**	2.60 **3.86**	2.49 **3.63**	2.41 **3.46**	2.34 **3.32**	2.28 **3.21**	2.24 **3.13**
26	4.22 **7.72**	3.37 **5.53**	2.89 **4.64**	2.74 **4.14**	2.59 **3.82**	2.47 **3.59**	2.39 **3.42**	2.32 **3.29**	2.27 **3.17**	2.22 **3.09**
27	4.21 **7.68**	3.35 **5.49**	2.96 **4.60**	2.73 **4.11**	2.57 **3.79**	2.46 **3.56**	2.37 **3.39**	2.30 **3.26**	2.25 **3.14**	2.20 **3.06**
28	4.20 **7.64**	3.34 **5.45**	2.95 **4.57**	2.71 **4.07**	2.56 **3.76**	2.44 **3.53**	2.36 **3.36**	2.29 **3.23**	3.24 **3.11**	2.19 **3.03**
29	4.18 **7.60**	3.33 **5.52**	2.93 **4.54**	2.70 **4.04**	2.54 **3.73**	2.43 **3.50**	2.35 **3.33**	2.28 **3.20**	2.22 **3.08**	2.18 **3.00**
30	4.17 **7.56**	3.32 **5.39**	2.92 **4.51**	2.69 **4.02**	2.53 **3.70**	2.42 **3.47**	2.34 **3.30**	2.27 **3.17**	2.21 **3.06**	2.16 **2.98**
32	4.15 **7.50**	3.30 **5.34**	2.90 **4.46**	2.67 **3.97**	2.51 **3.66**	2.40 **3.42**	2.32 **3.25**	2.25 **3.12**	2.19 **3.01**	2.14 **2.94**
34	4.13 **7.44**	3.28 **5.29**	2.88 **4.42**	2.65 **3.93**	2.49 **3.61**	2.38 **3.38**	2.30 **3.21**	2.23 **3.08**	2.17 **2.97**	1.12 **2.89**
36	4.11 **7.39**	3.26 **5.25**	2.86 **4.38**	2.63 **3.89**	2.48 **3.58**	2.36 **3.35**	2.28 **3.18**	2.21 **3.04**	2.15 **2.94**	2.10 **2.86**
38	4.10 **7.35**	3.25 **5.21**	2.85 **4.34**	2.62 **3.86**	2.46 **3.54**	2.35 **3.32**	2.26 **3.15**	2.19 **3.02**	2.14 **2.91**	2.09 **2.82**

F - பரவல்

5% (Roman Type - உரோமானியமுறை எழுத்து), 1% (**Bold-face Type** - கொட்டை எழுத்து) புள்ளிகள்.

சிறிய மாறுபாட்டுக்குரிய கட்டின்மைகள்	பெரிய மாறுபாடுக்குரிய கட்டின்மைகள்: 11	12	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞
17.	2.41 **3·52**	2.38 **3.45**	2.33 **3.35**	2.29 **3.27**	2.23 **3.16**	2.19 **3.08**	2.15 **3.00**	2.11 **2.92**	2.08 **2.86**	2.04 **2.79**	2.02 **2.76**	1.99 **2.70**	1.97 **2.67**	1.96 **2.65**
18.	2.37 **3.44**	2.34 **3.37**	2.29 **3.27**	2.25 **3.19**	2.19 **3.07**	2.15 **3.00**	2.11 **2.91**	2.07 **2.83**	2.04 **2.78**	2.00 **2.71**	1.98 **2.68**	1.95 **2.62**	1.93 **2.59**	1.92 **2.57**
19.	2.34 **3.36**	2.31 **3.30**	2.26 **3.19**	2.21 **3.12**	2.15 **3.00**	2.11 **2.92**	2.07 **2.84**	2.02 **2.76**	2.00 **2.70**	1.96 **2.63**	1.94 **2.60**	1.91 **2.54**	1.90 **2.51**	1.88 **2.49**
20.	2.31 **3.30**	2.28 **3.23**	2.23 **3.13**	2.18 **3.05**	2.12 **2.94**	2.08 **2.86**	2.04 **2.77**	1.99 **2.69**	1.96 **2.63**	1.92 **2.56**	1.90 **2.53**	1.87 **2.47**	1.85 **2.44**	1.84 **2.42**
21.	2.28 **3.24**	2.25 **3.17**	2.20 **3.07**	2.15 **2.99**	2.09 **2.88**	2.05 **2.80**	2.00 **2.72**	1.96 **2.63**	1.93 **2.58**	1.89 **2.51**	1.87 **2.47**	1.84 **2.42**	1.82 **2.38**	1.81 **2.36**
22.	2.26 **3.18**	2.23 **3.12**	2.18 **3.02**	2.13 **2.94**	2.07 **2·83**	2.03 **2.75**	1.98 **2.67**	1.93 **2.58**	1.91 **2.53**	1.87 **2.46**	1.84 **2.42**	1.81 **2.37**	1.80 **2.33**	1.78 **2.31**
23.	2.24 **3.14**	2.20 **3.07**	2.14 **2.97**	2.10 **2.89**	2.04 **2.78**	2.00 **2.70**	1.96 **2.62**	1.91 **2.53**	1.88 **2.48**	1.84 **2.41**	1.82 **2.37**	1.79 **2.32**	1.77 **2.28**	1.76 **2.26**
24.	2.22 **3.09**	2.18 **3.03**	2.13 **2.93**	2.09 **2.85**	2.02 **2.74**	1.98 **2.66**	1.94 **2.58**	1.89 **2.49**	1.86 **2.44**	1.82 **2.36**	1.80 **2.33**	1.76 **2.27**	1.74 **2.23**	1.73 **2.21**

25.	2.20 3.05	2.16 2.99	2.11 2.89	2.06 2.81	2.00 2.70	1.96 2.62	1.92 2.54	1.87 2.45	1.84 2.40	1.80 2.32	1.77 2.29	1.74 2.23	1.72 2.19	1.71 2.17
26.	2.18 3.02	2.15 2.96	2.10 2.86	2.05 2.77	1.99 2.66	1.95 2.58	1.90 2.50	1.85 2.41	1.82 2.36	1.78 2.28	1.76 2.25	1.72 2.19	1.70 2.15	1.69 2.13
27.	2.16 2.98	2.13 2.93	2.08 2.83	2.03 2.74	1.97 2.63	1.93 2.55	1.88 2.47	1.84 2.38	1.80 2.33	1.76 2.25	1.74 2.21	1.71 2.16	1.68 2.12	1.67 2.10
28.	2.15 2.95	2.12 2.90	2.06 2.80	2.02 2.71	1.96 2.60	1.91 2.52	1.87 2.44	1.81 2.35	1.78 2.30	1.75 2.22	1.72 2.18	1.69 2.13	1.67 2.09	1.65 2.06
29.	2.14 2.92	2.10 2.87	2.05 2.77	2.00 2.68	1.94 2.57	1.90 2.49	1.85 2.41	1.80 2.32	1.77 2.27	1.73 2.19	1.71 2.15	1.68 2.10	1.65 2.06	1.64 2.03
30.	2.12 2.90	2.09 2.84	2.04 2.74	1.99 2.66	1.93 2.55	1.89 2.47	1.84 2.38	1.79 2.29	1.76 2.24	1.72 2.16	1.69 2.13	1.66 2.07	1.64 2.03	1.62 2.01
31.	2.10 2.86	2.07 2.80	2.02 2.70	1.97 2.62	1.91 2.51	1.86 2.42	1.82 2.34	1.76 2.25	1.74 2.20	1.69 2.12	1.67 2.08	1.64 2.02	1.61 1.98	1.59 1.96
32.	2.08 2.82	2.05 2.76	2.00 2.66	1.95 2.58	1.89 2.47	1.84 2.38	1.80 2.30	1.74 2.21	1.71 2.15	1.67 2.08	1.64 2.04	1.61 1.98	1.59 1.94	1.57 1.91
33.	2.06 2.78	2.03 2.72	1.89 2.62	1.93 2.54	1.87 2.43	1.82 2.35	1.78 2.26	1.72 2.17	1.69 2.12	1.65 2.04	1.62 2.00	1.59 1.94	1.56 1.90	1.55 1.87
34.	2.05 2.75	2.02 2.69	1.96 2.59	1.92 2.51	1.85 2.40	1.80 2.32	1.76 2.22	1.71 2.14	1.67 2.08	1.63 2.00	1.60 1.97	1.57 1.90	1.54 1.86	1.53 1.84

அட்டவணை—5

மேன்-விட்னி-வில்காக்ஸன் சோதனை

1 சதவீத நிகழ்தகவுப் புள்ளிகள் – ஒருமுனைச் சோதனை

n_1 \ n_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
1	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	1
2	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	0	0	0	0	0	0	1	1	2
3	...	...	...	...	...	...	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3	4	4	4	5	3
4	...	...	...	...	0	1	1	2	3	3	4	5	5	6	7	7	8	9	9	10	4
5	...	...	...	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	5
6	...	...	...	1	2	3	4	6	7	8	9	11	12	13	15	16	18	19	20	22	6
7	...	...	0	1	3	4	6	7	9	11	12	14	16	17	19	21	23	24	26	28	7
8	...	...	0	2	4	6	7	9	11	13	15	17	20	22	24	26	28	30	32	34	8
9	...	...	1	3	5	7	9	11	14	16	18	21	23	26	28	31	33	36	38	40	9
10	...	...	1	3	6	8	11	13	16	19	22	24	27	30	33	36	38	41	44	47	10
11	...	...	1	4	7	9	12	15	18	22	25	28	31	34	37	41	44	47	50	53	11
12	...	...	2	5	8	11	14	17	21	24	28	31	35	38	42	46	49	53	56	60	12
13	...	0	2	5	9	12	16	20	23	27	31	35	39	43	47	51	55	59	63	67	13
14	...	0	2	6	10	13	17	22	26	30	34	38	43	47	51	56	60	65	69	73	14
15	...	0	3	7	11	15	19	24	28	33	37	42	47	51	56	61	66	70	75	80	15
16	...	0	3	7	12	16	21	26	31	36	41	46	51	56	61	66	71	76	82	87	16
17	...	0	4	8	13	18	23	28	33	38	44	49	55	60	66	71	77	82	88	93	17
18	...	0	4	9	14	19	24	30	36	41	47	53	59	65	70	76	82	88	94	100	18
19	...	1	4	9	15	20	26	32	38	44	50	56	63	69	75	82	88	94	101	107	19
20	...	1	5	10	16	22	28	34	40	47	53	60	67	73	80	87	93	100	107	114	20
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	n_2 \ n_1

5 சதவீத நிகழ்தகவுப் புள்ளிகள் — ஒருமுனைச் சோதனை

n_1 \ n_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
1	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	0	0	1
2	...	...	...	...	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4	2
3	...	...	0	0	1	2	2	3	3	4	5	5	6	7	7	8	9	9	10	11	3
4	...	...	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	15	16	17	18	4
5	...	0	1	2	4	5	6	8	9	11	12	13	15	16	18	19	20	22	23	25	5
6	...	0	2	3	5	7	8	10	12	14	16	17	19	21	23	25	26	28	30	32	6
7	...	0	2	4	6	8	11	13	15	17	19	21	24	26	28	30	33	35	37	39	7
8	...	1	3	5	8	10	13	15	18	20	23	26	28	31	33	36	39	41	44	47	8
9	...	1	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54	9
10	...	1	4	7	11	14	17	20	24	27	31	34	37	41	44	48	51	55	58	62	10
11	...	1	5	8	12	16	19	23	27	31	34	38	42	46	50	54	57	61	65	69	11
12	...	2	5	9	13	17	21	26	30	34	38	42	47	51	55	60	64	68	72	77	12
13	...	2	6	10	15	19	24	28	33	37	42	47	51	56	61	65	70	75	80	84	13
14	...	2	7	11	16	21	26	31	36	41	46	51	56	61	66	71	77	82	87	92	14
15	...	3	7	12	18	23	28	33	39	44	50	55	61	66	72	77	83	88	94	100	15
16	...	3	8	14	19	25	30	36	42	48	54	60	65	71	77	83	89	95	101	107	16
17	...	3	9	15	20	26	33	39	45	51	57	64	70	77	83	89	96	102	109	115	17
18	...	4	9	16	22	28	35	41	48	55	61	68	75	82	88	95	102	109	116	123	18
19	0	4	10	17	23	30	37	44	51	58	65	72	80	87	94	101	109	116	123	130	19
20	0	4	11	18	25	32	39	47	54	62	69	77	84	92	100	107	115	123	130	138	20
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	n_2 \ n_1

மேன்-விட்னி-வில்காக்ஸன் சோதனை

1 சதவீத நிகழ்தகவுப் புள்ளிகள் — இருமுனைச் சோதனை

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
1	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	1
2	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	0	0	2
3	...	...	...	...	...	...	...	...	0	0	0	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3
4	...	...	...	...	...	0	0	1	1	2	2	3	3	4	5	5	6	6	7	8	4
5	...	...	...	...	0	1	1	2	3	4	5	6	7	7	8	9	10	11	12	13	5
6	...	...	...	0	1	2	3	4	5	6	7	9	10	11	12	13	15	16	17	18	6
7	...	...	...	0	1	3	4	6	7	9	10	12	13	15	16	18	19	21	22	24	7
8	...	...	...	1	2	4	6	7	9	11	13	15	17	18	20	22	24	26	28	30	8
9	...	...	0	1	3	5	7	9	11	13	16	18	20	22	24	27	29	31	33	36	9
10	...	...	0	2	4	6	9	11	13	16	18	21	24	26	29	31	34	37	39	42	10
11	...	...	0	2	5	7	10	13	16	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	11
12	...	...	1	3	6	9	12	15	18	21	24	27	31	34	37	41	44	47	51	54	12
13	...	...	1	3	7	10	13	17	20	24	27	31	34	38	42	45	49	53	57	60	13
14	...	...	1	4	7	11	15	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	63	67	14
15	...	...	2	5	8	12	16	20	24	29	33	37	42	46	51	55	60	64	69	73	15
16	...	...	2	5	9	13	18	22	27	31	36	41	45	50	55	60	65	70	74	79	16
17	...	...	2	6	10	15	19	24	29	34	39	44	49	54	60	65	70	75	81	86	17
18	...	...	2	6	11	16	21	26	31	37	42	47	53	58	64	70	75	81	87	92	18
19	...	0	3	7	12	17	22	28	33	39	45	51	57	63	69	74	81	87	93	99	19
20	...	0	3	8	13	18	24	30	36	42	48	54	60	67	73	79	86	92	99	105	20
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	n_1 \ n_2

5 சதவீத நிகழ்தகவுப் புள்ளிகள் — இருமுனைச் சோதனை

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
1	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	1
2	...	...	...	...	...	...	...	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
3	...	...	...	...	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	3
4	...	...	...	0	1	2	3	4	4	5	6	7	8	9	10	11	11	12	13	13	4
5	...	...	0	1	2	3	5	6	7	8	9	11	12	13	14	15	17	18	19	20	5
6	...	...	1	2	3	5	6	8	10	11	13	14	16	17	19	21	22	24	25	27	6
7	...	...	1	3	5	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	7
8	...	0	2	4	6	8	10	13	15	17	19	22	24	26	29	31	34	36	38	41	8
9	...	0	2	4	7	10	12	15	17	20	23	26	28	31	34	37	39	42	45	48	9
10	...	0	3	5	8	11	14	17	20	23	26	29	33	36	39	42	45	48	52	55	10
11	...	0	3	6	9	13	16	19	23	26	30	33	37	40	44	47	51	55	58	62	11
12	...	1	4	7	11	14	18	22	26	29	33	37	41	45	49	53	57	61	65	69	12
13	...	1	4	8	12	16	20	24	28	33	37	41	45	50	54	59	63	67	72	76	13
14	...	1	5	9	13	17	22	26	31	36	40	45	50	55	59	64	67	74	78	83	14
15	...	1	5	10	14	19	24	29	34	39	44	49	54	59	64	70	75	80	85	90	15
16	...	1	6	11	15	21	26	31	37	42	47	53	59	64	70	75	81	86	92	98	16
17	...	2	6	11	17	22	28	34	39	45	51	57	63	67	75	81	87	93	99	105	17
18	...	2	7	12	18	24	30	36	42	48	55	61	67	74	80	86	93	99	106	112	18
19	...	2	7	13	19	25	32	38	45	52	58	65	72	78	85	92	99	106	113	119	19
20	...	2	8	13	20	27	34	41	48	55	62	69	76	83	90	98	105	112	119	127	20
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	n_2 \ n_1

அட்டவணை—6

ஓட்டச் சோதனை 1 சதவீத நிகழ்தகவுப் புள்ளிகள்

n_1 \ n_2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
3	...	...	...	...	...	...	...	...	...	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3
4	...	...	...	...	...	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	4
5	...	...	...	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	5
6	...	...	2	2	2	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	6
7	...	...	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	7
8	...	2	2	3	3	3	3	4	4	4	5	5	5	5	5	6	6	6	8
9	...	2	2	3	3	3	4	4	5	5	5	5	6	6	6	6	6	7	9
10	...	2	3	3	3	4	4	5	5	5	5	6	6	6	7	7	7	7	10
11	...	2	3	3	4	4	5	5	5	6	6	6	7	7	7	7	8	8	11
12	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	6	7	7	7	8	8	8	8	12
13	2	2	3	3	4	5	5	5	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9	13
14	2	2	3	4	4	5	5	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9	9	14
15	2	3	3	4	4	5	6	6	7	7	7	8	8	9	9	9	10	10	15
16	2	3	3	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	9	10	10	10	16
17	2	3	3	4	5	5	6	7	7	8	8	8	9	9	10	10	10	11	17
18	2	3	4	4	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10	11	11	11	18
19	2	3	4	4	5	6	6	7	8	8	9	9	10	10	10	11	11	12	19
20	2	3	4	4	5	6	7	7	8	8	9	9	10	10	11	11	12	12	20
	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	n_1 / n_2

5 சதவீத நிகழ்தகவுப் புள்ளிகள்

n_1 \ n_2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
2	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	…	…	…	…	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3
4	…	…	…	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4
5	…	…	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5
6	…	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	6	6	6
7	…	2	2	3	3	3	4	4	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6	7
8	…	2	3	3	3	4	4	5	5	5	6	6	6	6	6	7	7	7	7	8
9	…	2	3	3	4	4	5	5	5	6	6	6	7	7	7	7	8	8	8	9
10	…	2	3	3	4	5	5	5	6	6	7	7	7	7	8	8	8	8	9	10
11	…	2	3	4	4	5	5	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9	9	9	11
12	2	2	3	4	4	5	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9	9	10	10	12
13	2	2	3	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	9	10	10	10	10	13
14	2	2	3	4	5	5	6	7	7	8	8	9	9	9	10	10	10	11	11	14
15	2	3	3	4	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10	11	11	11	12	15
16	2	3	4	4	5	6	6	7	8	8	9	9	10	10	11	11	11	12	12	16
17	2	3	4	4	5	6	7	7	8	9	9	10	10	11	11	11	12	12	13	17
18	2	3	4	5	5	6	7	8	8	9	9	10	10	11	11	12	12	13	13	18
19	2	3	4	5	6	6	7	8	8	9	10	10	11	11	12	12	13	13	13	19
20	2	3	4	5	6	6	7	8	9	9	10	10	11	12	12	13	13	13	14	20
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	n_2 \ n_1

அட்டவணை—7

வில்காக்ஸன் சோடிப் பொருத்தத் தரக் குறியீட்டுச் சோதனை

5 சதவீத, 1 சதவீத நிகழ்தகவுப் புள்ளிகள்

n	ஒருமுனை T − or T +		இருமுனை T	
	1%	5%	1%	5%
6	—	2	—	0
7	0	3	—	2
8	2	5	0	4
9	3	8	2	6
10	5	10	3	8
11	7	13	5	11
12	10	17	7	14
13	13	21	10	17
14	16	25	13	21
15	20	30	16	25
16	24	35	20	30
17	28	41	23	35
18	33	47	28	40
19	38	53	32	46
20	43	60	38	52
21	49	67	43	59
22	56	75	49	66
23	62	83	55	73
24	69	91	61	81
25	77	100	68	89

மேற்கோள் நூற்பட்டியல்

(BIBLIOGRAPHY)

1. An Introduction to Mathematical Statistics, Ginn and Company, New-York : H.D.Brunk

2. Mathematical Methods of Statistics, Princeton University Press : H.Cramer

3. Probability and Statistics, W.A. Benjamin Inco, 1970 : M.Dwass

4. Introduction to Mathematical Statistics, Macmillan and Co, 1959 : R. Hogg and A.Craig

5. Introduction to Mathematical Statistics, John Wiley and Sons. : P.G.Hoel

6. Introduction to Probability Theory and Statistical Inference, Wiley Publications, 1968 : H. J. Larson

7. Modern Probability Theory and Its Applications, John Wiley and Sons New-York, 1960 : E. Parzen

8. Statistical Methods, Allied Pacific Limited, 1956, Bombay : G.W.Snedecor

MADRAS
26 MAY 197?
MADRAS

கலைச்சொற்கள்

அ

அலைவெண் பரவல் — Frequency distribution
அலைவுப் பரவல் — Frequency distribution

இ

இடைநிலை — Median
இடைவெளி — Interval
இணைப் பட்டியல் — Contingency table
இயல்நிலைப் பரவல் — Normal distribution
இயல்நிலை வளைகோடு — Normal curve
இருமாறி முழுமைத் தொகுதி — Bivariate population
இறங்கு வரிசை — Descending order

ஈ

ஈருறுப்பு — Binomial
ஈருறுப்புக் கோவை — Binomial expression
ஈருறுப்புப் பரவல் — Binomial distribution

உ

உடன் மாறுபாடு — Co-variance
உண்மையான பிரிவு இடைவெளி — True class interval
உய்த்துணர்வு — Inductive inference
உருவ அளவு — Size
உருவ விளக்கப்படம் — Pictogram
உறுப்பு — Item
உறுப்பு — Member

எ

எடுகோள் — Hypothesis
எடுகோள் சோதனை — Test of hypothesis

எண்ணிலி	—	Infinity
எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு	—	Expected value
எதிர்மறை ஒட்டுறவு	—	Negative correlation

ஏ

ஏறு வரிசை	—	Ascending order

ஓ

ஓகைவ் வளைகோடு	—	Ogive curve
ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள்	—	Mutually exclusive events

க

கணக்கிடுதல்	—	Computation
கணித்தல்	—	Computation
கண்டறிந்த விவரங்கள்	—	Observed data

கா

கால்மானம்	—	Quartile
கால்மான விலக்கம்	—	Quartile deviation

கீ

கீழ் எல்லை	—	Lower limit
கீழ்க் கால்மானம்	—	Lower quartile
கீழான ஓகைவ்	—	Less than ogive

கு

குவிவு அலைவெண்	—	Cumulative frequency
குவிவுப் பரவல்	—	Cumulative distribution
குவிவு வளைகோடு	—	Cumulative curve

கூ

கூட்டுத் தொகை	—	Sum
கூறு	—	Sample

கூறெடுத்தல் — Sampling
கூறுகளைத் தேர்ந்தெடுத்தல் — Sampling
கூறு சராசரி — Sample mean
கூறு அளவை — Statistic
கூறு பரவல் — Sampling distribution

கெ

கெழு — Coefficient

கோ

கோட்ட அளவை — Measures of skewness

ச

சதவீதம் — Percentage
சமச்சீர் — Symmetry
சமச்சீராக — Symmetrical
சமன்பாட்டுப் படி — Degrees of freedom
சமன்பாடு — Equation
சமம் — Equivalent
சராசரி — Average, Arithmetic mean
சமவாய்ப்பு — Random
சமவாய்ப்பு எண்கள் — Random numbers
சமவாய்ப்புக் கூறு — Random sample

சா

சாதகமான நிகழ்ச்சி — Favourable event
சார்புடைய நிகழ்ச்சிகள் — Dependent events
சார்பற்ற தன்மைக்கான சோதனை — Test for independence
சார்பற்ற நிகழ்ச்சி — Independent event
சார்பற்ற மாறி — Independent variate

சி

சிதறல் — Dispersion, Scatter

சீ

சீரான பரவல் — Symmetrical distribution
சீரிலாப் பரவல் — Assymmetrical distribution

சுட்டுறுப்பு — Parameter

செ

செறிவு — Density

சோ

சோதனை எடுகோள் — Test hypothesis
சோதனைப் புள்ளியியல் மாறி — Test statistic

த

தரம் — Rank
தனி மதிப்பு — Absolute value
தனி விலக்கம் — Absolute deviation

தி

திட்ட இயல்நிலைப் பரவல் — Standard normal distribution
திட்டப் பிழை — Standard error
திட்ட விலக்கம் — Standard deviation

ந

நடுநிலையான — Unbiased
நம்பிக்கை வரை — Confidence limit

நி

நிகழ்ச்சி — Event
நிகழ்தகவு — Probability
நிரல் — Column
நிரை — Row

நூ

நூற்றுமானம் — Percentile

ப

பண்பின் விவரங்கள் — Qualitative data
பல படித்தான — Heterogeneous
பரவல் — Distribution

பா

பாகுபடுத்து — Classify
பாகுபாடு — Classification
பாய்சான் பரவல் — Poisson distribution

பி

பிரிவு — Class
பிரிவு அலைவெண் — Class frequency
பிரிவு இடைவெளி — Class interval
பிரிவு எல்லை — Class limit

பெ

பெருங்கூறு — Large sample

பு

புள்ளியியல் — Statistics
புள்ளியியல் உய்த்துணர்வு — Statistical inference
புள்ளியியல் பண்பளவை — Statistic
புள்ளி விவரங்கள் — Statistical data

ம

மணி வடிவமான — Bell shaped
மதிப்பீடு — Estimate
மறுக்கத்தகு எடுகோள் — Null hypothesis

மா

மாற்று எடுகோள் — Commutative hypothesis
மாறுபாட்டுக் கெழு — Coefficient of variation
மாறுபாடு — Variance
மாறி — Variate, variable

மி

மிகைத் தன்மை சோதனை — Test of significance
மிகைத் தன்மை மட்டம் — Level of significance

மீ

மீச்சிறு — Minimum
மீப்பெரு — Maximum

மை

மையப் போக்கு	—	Central tendency
மையப் போக்கு அளவைகள்	—	Measures of central tendency

மு

முதல் கால்மானம்	—	First quartile
முதனிலை விவரங்கள்	—	Primary data
முழுமைத் தொகுதி	—	Population
முழுமைத் தொகுதியின் பண்பளவை	—	Parameter

மே

மேல் எல்லை	—	Upper limit

வ

வரைபடம்	—	Graph

வி

விலக்கம்	—	Deviation
விவரங்கள்	—	Data

வீ

வீச்சு	—	Range
வீதம்	—	Rate